Concours René Merckhoffer 2013

Éléments de solution

Exercice 1 Tables égyptiennes

1. Cette ligne devrait signifier « le double de $\frac{1}{9}$ est $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$ ». Or $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{3+1}{18}$, qui est bien $\frac{2}{9}$.

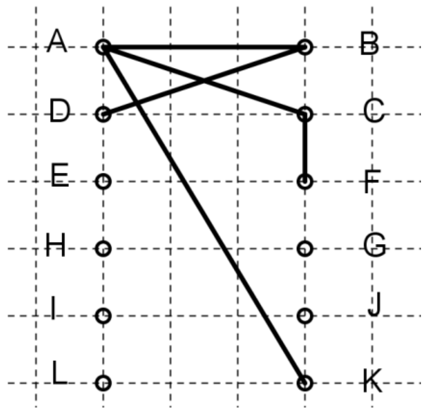
2. Pour retrouver l'élément manquant dans la ligne du 15, il faut faire la différence entre $\frac{2}{15}$ et $\frac{1}{10}$. Ce calcul donne : $\frac{2}{15}-\frac{1}{10}=\frac{4-3}{30}$. L'élément manquant est donc 30.

Si on en juge par la disposition de la table l'élément manquant s'obtient comme la différence entre $\frac{2}{17}$ et la somme $\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$. Cette somme est égale à $\frac{7}{204}$. Finalement $\frac{2}{17}-\frac{7}{204}=\frac{24-7}{204}$. L'élément manquant est 12.

3. On s'intéresse aux doubles des inverses d'entiers impairs, car les doubles des inverses d'entiers pairs sont les inverses de leurs moitiés.

N.B. Les Égyptiens utilisaient des fractions pour mesurer des grandeurs (essentiellement des longueurs et des capacités) et les comparer. Ils ne possédaient pas la notion de nombre (non entier). C'est pourquoi on parle ici de fractions et non de quotients et d'écriture fractionnaire de nombres.

Exercice 2 Les lacets



Chacun des laçages proposés a une longueur somme de longueurs de segments tels AB, AC, AK, CF et BD.

La longueur AB est 3, la longueur CF est 1. Le théorème de Pythagore, appliqué successivement aux triangles ABC, DAB et ABK, respectivement rectangles en B, A et B, fournit les résultats :

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{BC}^2=10$ et $\mathrm{AK}^2=34$

On peut écrire la longueur obtenue avec chacun des laçages :

Résultat littéral	Séquence calculatrice	Affichage
$L(\text{ZIGZAG})=10\times\mathrm{AC}+\mathrm{AB}$	$\boxed{10}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{10}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{34.6227766}$
$L(\text{Noeud Papillon})=4\times\mathrm{AC}+\mathrm{AB}+6\mathrm{CF}$	$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{10}\ \boxed{+}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{6}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{21.64911064}$
$L(\text{Gavage})=5\times\mathrm{AC}+5\times\mathrm{AB}+\mathrm{AK}$	$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{10}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\boxed{\times}\boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{34}\ \boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{36.6423402}$

La précision de la calculatrice autorise à conclure que le laçage « Gavage » est le plus long, et le « Nœud papillon » le plus court.

N.B. On pouvait aussi procéder en deux comparaisons directes, le Nœud papillon contre le Zigzag, puis le Zigzag contre le Gavage, pour éliminer directement les éléments communs (AB et quatre AC entre le Nœud papillon et le Zigzag, AB et cinq AC entre le Zigzag et le Gavage).

Exercice 3 Vrai – Faux

1. Il n’y a pas 3 réponses **V** pour la suite des questions 2 – 3 – 4 – 5 – 6.

2. Pour toute suite de 5 questions, il y a trois réponses **V**. Le découpage « 1 à 5, 6 à 10, 11 à 15, 16 à 20, 21 à 25 » en cinq séries de cinq questions montre qu’il doit y avoir 5×3, c’est-à-dire 15 réponses **V**.

3. Si la réponse à la première question est **F**, il y a exactement trois réponses **V** à distribuer pour les questions 2 à 5. Mais alors, la réponse à la question 6 est **F** sinon il y aurait quatre réponses **V** dans les 5 questions de 2 à 6

4. Envisageons les débuts de série possibles :

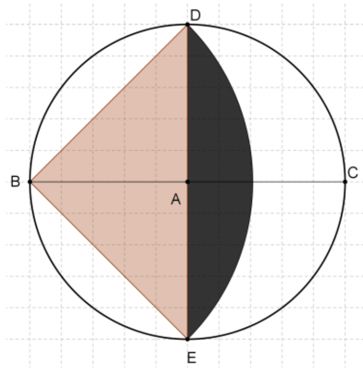
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F	F	V	V	V	F	F			
F	V	F	V	V	F	V			
F	V	V	F	V	F	V			
F	V	V	V	F	F	V			

La série de réponses commence par **F**. Elle ne peut commencer par **F F F**, car il n’y aurait pas trois **V** dans les cinq premières réponses. Elle commence donc par **F F** ou **F V**.

Si elle commence par **F F**, la suite est inéluctablement **V V V**, et le motif **F F V V V** se répète. Mais alors, la dernière réponse est **V**, contrairement à l’hypothèse.

Si elle commence par **F V**, il y a un, deux ou trois **V** qui suivent le premier **F**. Comme dans la situation précédente, ces trois situations créent trois motifs qui se répètent cinq fois. Un seul place un **F** en cinquième position…

Exercice 4 Dans les yeux



L’aire du segment circulaire limité par l’arc $\overset{\frown}{DE}$ du cercle de centre B et de rayon BD et la corde [DE] qui le sous-tend est la différence entre l’aire du quart de disque de centre B et de rayon BD et l’aire du triangle BDE.

On parle de quart de disque, parce que les triangles DAB et EAB sont rectangles et isocèles en A. Leurs angles aigus ont donc pour mesure 45°. Le triangle DBE est donc rectangle en B et isocèle ([EB] et [DB] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles ayant en commun un côté de leur angle droit respectif).

L’aire du quart de disque est : $A=\frac{1}{4}\pi\times \mathrm{BD}^2$.

D’après le théorème de Pythagore appliqué au triangle BAD rectangle en A, $\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2$.

Et donc $\mathrm{BD}^2=50$.

L’aire du triangle EBD est $A'=\frac{1}{2}\mathrm{BA}\times\mathrm{ED}$.

L’aire de la pupille du chat est le double de l’aire du segment circulaire : $P_C=2\times\left(\frac{1}{4}\pi\mathrm{BD}^2-\frac{1}{2}\mathrm{BA}\times\mathrm{ED}\right)$.

Autrement écrit :

$P_C=25\ \pi-2$

La pupille du lapin est un disque de rayon 3.

$P_L=9\pi$

La différence peut être écrite :

$P_C-P_L=16\pi-50$

La séquence

$\boxed{16}\ \boxed{\times}\ \boxed{\pi}\ \boxed{-}\ \boxed{50}\ \boxed{\text{EXE}}$

provoque l’affichage

$\boxed{0.2654824574}$.

On conclut donc que l’aire de la pupille du chat est supérieure à l’aire de la pupille du lapin.