Mardi 19 juillet 2011

Problème 4. Soit n un entier strictement positif. On dispose d'une balance à deux plateaux et de n poids, de masses respectives $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.
On doit placer, l'un après l'autre, chacun des n poids sur la balance de telle sorte que le plateau de droite ne soit jamais plus lourd que le plateau de gauche ; dans ce but, à chaque étape, on doit choisir un poids qui n'est pas déjà sur la balance et le placer soit sur le plateau de gauche, soit sur le plateau de droite ; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les poids soient placés.
Déterminer le nombre de façons de procéder.

Problème 5. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
Soit f une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que, quels que soient les entiers m, n, la différence $f(m) - f(n)$ est divisible par $f(m-n)$.
Quels que soient les entiers m, n vérifiant $f(m) \leqslant f(n)$, montrer que $f(n)$ est divisible par $f(m)$.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit Γ son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite tangente à Γ. Soit ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c les droites symétriques de ℓ par rapport respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c est tangent à Γ.

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points