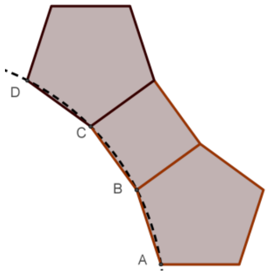
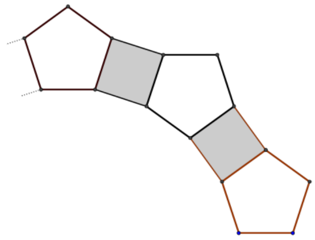
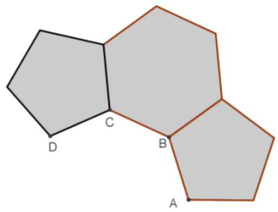
Éléments de solution pour OPE 2015

Exercice 1 Colliers et bracelets

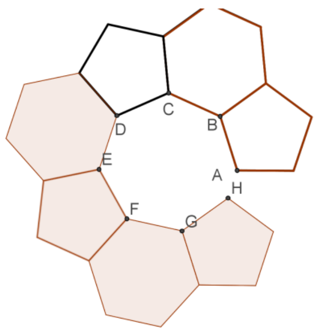


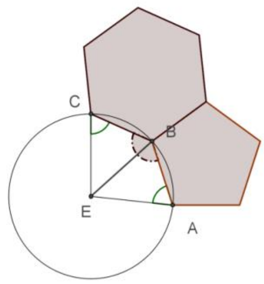


1. Considérons trois éléments consécutifs de l'ouvrage, et les points A, B, C et D extrémités de côtés d'un carré et de deux pentagones. Le cercle passant par A, B et C est centré en O, point appartenant à la médiatrice de [BC]. Cette médiatrice est un axe de symétrie pour la figure (le carré est transformé en lui-même et les pentagones sont échangés). Il s'ensuit que le cercle passant par A, B et C passe aussi par D. De proche en proche (la médiatrice de [CD] est elle aussi un axe de symétrie…) le cercle passant par A, B et C contient tous les sommets « main gauche » de la figure. On se souvient que les angles intérieurs d'un polygone convexe de *n* côtés ont pour somme $(n-2)180$, en degrés. Les angles intérieurs d'un pentagone régulier mesurent 108° et ceux du carré 90°. L'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ a pour mesure 162°. Notre collier a donc, s'il existe, un nombre de côtés *n* vérifiant : $(n-2)180 = n.162$. Donc $n = 20$. Le bord intérieur du collier est un polygone régulier à 20 côtés (le terme *icosagone* semble généralement utilisé).



2. Le début est le même : le cercle passant par trois extrémités de côtés consécutifs d'éléments voisins passe par le quatrième (dans la figure ci-contre, la médiatrice de [BC] est axe de symétrie). Les angles intérieurs d'un pentagone régulier mesurant 108° et ceux d'un hexagone régulier 120°, si le motif peut être poursuivi avec comme bord « main gauche » un polygone régulier, ce polygone doit avoir un nombre *n* de côtés satisfaisant la condition : $(n-2)180 = n.132$. Mais cette équation n'a pas de solution entière. La figure ci-contre montre ce qu'il arrive après un « tour ».





En revenant à la figure initiale, on sait que l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ mesure 132° et que les triangles EAB et EAC sont isocèles La *somme* des angles $\widehat{\mathrm{BCE}}$ et $\widehat{\mathrm{BAE}}$ est 132° (ce qui ne veut pas dire qu'ils mesurent chacun 66° !). L'angle au centre $\widehat{\mathrm{AEC}}$ mesure donc 360 – 2 x 132 = 96°. Par conséquent, on obtient un nombre entiers de tours complets avec des assemblages de deux pièces (un pentagone, un hexagone) pour le plus petit multiple commun de 96 et 360, c'est-à-dire 1440. On aura fait 4 tours, en assemblant 15 paires pentagone-hexagone.

Il peut paraître satisfaisant de s'arrêter à 7 paires pentagone-hexagone plus un pentagone, mais, dans ce cas, si (ce qu'il faudrait vérifier) le dernier sommet situé sur le cercle paraît confondu avec le premier, les côtés « radiaux » (terme impropre, leurs supports ne passent pas par le centre du cercle) ne sont pas confondus.

Si les côtés des pièces mesurent 2cm, on voisine avec une quarantaine de centimètres de tour pour un collier, une quinzaine pour un bracelet…

Exercice 2 Sous-diagonale

1. Un exemple

4	3	1	2	5
5	1	2	4	3
2	5	3	1	4
3	2	4	5	1
1	4	5	3	2

2. Le *score* peut-il être 20 ?

5				
	5			
		5		
			5	

Le dernier 5 ne trouve aucune place sur la diagonale principale.

3. Le *score* peut-il être 19 ? (premier cas)

				5
5				
	5			
		5		
			4	

Le 5 de la diagonale secondaire a été placé dans la seule case possible. Il ne reste aucune place pour le dernier 5.

3. Le *score* peut-il être 19 ? (suite)

5				
	5			
		4		
			5	

Le 5 de la première diagonale ne trouve pas de place. Pour des raisons de symétrie, les deux autres positions du 4 sont éliminées. Idem pour un *score* 18 réalisé avec trois 5 et un 3

3. Le *score* peut-il être 18 ? (premier cas)

				5
5				
	5			
		4		
			4	

On place le 5 de la diagonale secondaire au seul endroit possible. C'était aussi le seul endroit possible pour le 4 de cette diagonale.

3. Le *score* peut-il être 18 ? (suite)

4	5			
5			4	
	4	5		
		4		5
			5	

Le 5 de la diagonale principale n'a qu'une place possible. Il n'y a qu'une possibilité pour les deux autres 5. Il reste deux places pour le 4 de la diagonale principale, mais l'ensemble est symétrique par rapport à la diagonale secondaire. Une fois ce 4 placé, il ne reste qu'une case pour le quatrième 4, mais plus pour le cinquième.

3. Le *score* peut-il être 18 ? (fin)

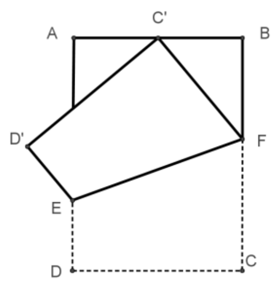
5				
	4			
		5		
			4	5

Une fois placé le 5 de la diagonale principale à la seule place possible, il ne reste rien pour le 5 de la diagonale secondaire…

Conclusion : Toutes les dispositions ont été examinées pour la sous-diagonale, aux symétries près. Elle doit donc faire apparaître trois chiffres distincts.

Comme le montre le tableau donné comme exemple pour répondre à la question **1.**, un *score* 17 est possible. C'est le *score* maximum.

Exercice 3 Origami



Appelons x la longueur CF. On a C'F = CF (le pliage correspond à une réflexion d'axe (EF)). Dans le triangle BFC', rectangle en B, appliquons le théorème de Pythagore : $\mathrm{BF}^2 = x^2 - 120^2$. Par ailleurs $x + \mathrm{BF} = 288$. On peut résoudre l'équation : $(288 - x)^2 = x^2 - 120^2$. On trouve $x = 169$.

Les triangles AC'E et D'C'E sont rectangles et ont même hypoténuse.

Si on pose $\mathrm{DE} = y$, on peut écrire une équation d'inconnue y :

$$y^2 + 240^2 = 120^2 + (288 - y)^2.$$

Cette équation s'écrit aussi : $576y = 39\,744$, soit finalement $y = 69$.

Si on appelle H le projeté orthogonal de E sur (BC), le triangle EHF, rectangle en H, fournit $\mathrm{EF}^2 = \mathrm{FH}^2 + \mathrm{EH}^2$, soit $\mathrm{EF}^2 = (169 - 69)^2 + 240^2$

ou encore $EF = 260$.