Passage de témoin

Éléments de solution

Première situation : il y a trois cartes au départ

1. ***a.*** Si l'ordre des cartes tirées est $1, 2, 3$, le *témoin* prend les valeurs $1 + 2 + 1 \times 2 = 5$ puis $5 + 3 + 3 \times 5 = 23$. On vérifie que les ordres $2, 3, 1$ et $3, 1, 2$ donnent le même résultat (on considère que les deux premiers tirages donnent un résultat indépendant de l'ordre…)

b. Le *bilan* s'écrit : $B = c + (a + b + ab) + c \times (a + b + ab) = a + b + c + ab + bc + ca + abc$. Sous cette forme, on voit que le résultat est indépendant de l'ordre du tirage.

2. En tâtonnant, pas très longtemps, on trouve que $2, 3, 4$ est une distribution possible des nombres portés sur les cartes. Si on veut trouver le même résultat, on peut commencer par 1. On cherche alors b et c pour lesquels $1 + b + c + b + c + bc + bc = 59$, c'est-à-dire $2\,(b + c + bc) = 58$, donc $b + c + bc = 29$. C'est le moment de s'aviser que $b + c + bc = (b + 1)(c + 1) - 1$ et donc que $(b + 1)(c + 1) = 30$. Les possibilités sont $b = 2$ et $c = 9$ ou $b = 4$ et $c = 5$.

Variante : si on a connaissance de la « factorisation forcée » :

$a + b + c + ab + bc + ca + abc = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1,$

On n'a plus qu'à ajuster des diviseurs de 60. Trois solutions, donc : $\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 9\}, \{1, 4, 5\}$.

Deuxième situation : il y a dix cartes, numérotées de $\mathbf{1}$ à $\mathbf{10}$.

3. ***a.*** Nous avons vu que pour trois cartes numérotées a, b, c le *bilan* (ou le *témoin* si les trois cartes tirées sont les premières d'une série plus longue) vaut $B = (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1$. Le produit figurant dans cette expression est un produit de nombres entiers distincts compris entre 2 et 11. Il prend sa valeur minimum pour les trois plus petits possibles, $2, 3$ et 4. Le plus petit *témoin* possible après trois tirages est donc 23.

b. Il prend sa plus grande valeur pour les trois plus grands, $11, 10$ et 9. Le plus grand *témoin* possible après trois tirages est donc 989.

4. ***a.*** Comme dans le cas de trois cartes, l'ordre est sans importance pour déterminer le *témoin* à l'issue de quatre tirages. Si on appelle a et b les nombres figurant sur les cartes inconnues, on a :

$$a + b + 4 + 8 + 4a + 4b + 32 + 8a + 8b + ab + 4ab + 8ab + 32a + 32b + 32ab = 719$$

Soit, en réduisant : $45a + 45b + 45ab + 44 = 719$, ou encore $a + b + ab = 15$, ce qui donne $a = 1$ et $b = 7$.

Cela va un peu plus vite si on utilise l'identité :

$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) - 1 = a + b + c + d + ab + bc + vd + da + ac + db + abc + bcd + cda + dab + abcd$.

b. Nous cherchons quatre entiers x, y, z, t à prendre parmi $2, 3, 5, 6, 9$ et 10 tels que :

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1)(t + 1) = 720.$$

10 et 6 sont à éliminer, 720 n'étant multiple ni de 11 ni de 7.

Et, justement : $(2 + 1)(3 + 1)(5 + 1)(9 + 1) = 720$

Les entiers cherchés sont $2, 3, 5$ et 9.

5. Comme on est à la recherche d'une condition nécessaire, on ne peut que supposer que le tirage se fait à partir de la plus petite carte et dans l'ordre croissant. Utilisons la notation de la *factorielle* : $1! = 1, 2! = 1 \times 2 = 2, 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, etc.

On a $4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5\,040, 8! = 40\,320, 9! = 362\,880$ et $10! = 3\,628\,800$.

Il faut tirer 9 cartes pour porter le *témoin* à plus de $1\,000\,000$.