Avez-vous la forme olympique ?

La cellule académique, constituée de professeurs et chargée de faire des propositions de sujets pour les Olympiades académiques de mathématiques, a relevé dans le cours de son travail quelques énoncés qu'elle n'a pas conservés pour la compétition. Ils peuvent avoir été écartés pour des raisons de longueur (ou de brièveté), de difficulté ou de technicité. Certains peuvent avoir semblé trop « connus » (ce point de vue est naturellement subjectif). Ils n'avaient pas la forme olympique.

*Une sélection de ces énoncés (***dont la mise en forme éventuelle est laissée à l'appréciation des professeurs***) est proposée ici. Les noms des auteurs ne sont pas donnés, car on n'est jamais sûr d'être absolument original dans ce domaine. Le site académique remercie chaleureusement ces auteurs inconnus.*

1. Distance d'un point à une parabole

Dans le plan rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{i}, \vec{j}$), on considère la parabole P d'équation y = x^2 et un point A du plan, de coordonnées a et b, réels quelconques. On se propose d'étudier l'existence d'un point M de la parabole pour lequel la distance AM est minimale.
L'exercice (dont l'énoncé peut être plus ou moins détaillé ou délayé) propose d'étudier la fonction f définie par f(x) = AM², où x est l'abscisse d'un point M de la parabole, de faire apparaître le rôle joué par les tangentes à la parabole, en distinguant les cas où A est sur la parabole, extérieur à la parabole, intérieur à la parabole.

2 . Etude de la profondeur d'un puits

On laisse tomber un caillou dans un puits. Le chronomètre indique qu'il s'est écoulé 4 secondes entre l'instant où on a lâché le caillou et celui où on a entendu « Plouf ! ». La vitesse du son dans l'air est 340 ms^{-1} , l'accélération due à la pesanteur est notée g, et prise ici égale à 10 ms^{-2} , et la chute du caillou dans l'air obéit approximativement à la loi dite « $h = \frac{1}{2}gt^2$ », *h* étant la distance parcourue par le mobile dans sa chute pendant la durée *t*. Quelle est la distance séparant l'observateur de la surface libre de l'eau dans le puits ? On arrondira au mètre.

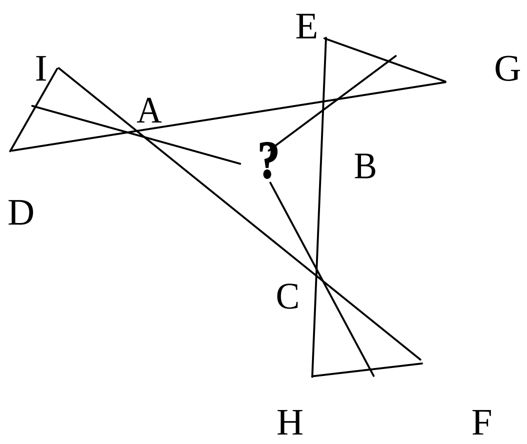
3. Carrés magiques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On appelle carré magique d'ordre n un damier carré comportant n² cases remplies à l'aide des entiers 1 à n² et vérifiant les conditions suivantes : chaque nombre est utilisé exactement une fois et sur chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale la ,somme des nombres est la même.
Déterminer les carrés magiques d'ordre 3.

4. Un problème de concours

On donne un triangle ABC. Sur les droites (AB), (BC) et (CA) on considère les points D et G, E et H, F et I respectivement, les paires citées ayant pour milieux les milieux des segments [AB], [BC] et [CA].

Montrer que les médianes issues de A, B et C dans les triangles ADI, BEG et CFH sont concourantes (une solution ne faisant pas appel à un repère cartésien serait bienvenue).



5. Aire et périmètre extrémaux

Sur les côtés]AB[,]BC[,]CD[et]DA[d'un rectangle (les crochets signifient qu'on se limite aux segments et que les sommets eux-mêmes sont interdits), on place des points M, N, P et Q respectivement. Comment faire en sorte que le périmètre du quadrilatère MNPQ soit minimal ?
Parmi les quadrilatères trouvés, y en a-t-il un dont l'aire soit maximale ?

6. Etude d'une polaire de choc

ETUDE D'UNE POLAIRE DE CHOC EN AERODYNAMIQUE

I) Sur un axe (O, $\vec{i}$) ($\|\vec{i}\| = 1$), on place les points Q,P,A dans cet ordre.

Soit C_1 et C_2 les cercles de diamètre respectif $[QA]$ et $[QP]$. Soit B un point de C_1 distinct de A et de Q ; F le projeté orthogonal de B sur (O, $\vec{i}$) ; C le projeté orthogonal de P sur (QB) ; P' le point d'intersection des droites (CP) et (BF) :

1) Faire une figure dans le cas particulier où le vecteur unitaire $\vec{i}$ a pour longueur 6 cm et les abscisses respectives des points Q,P,A sont : $\frac{1}{2}$; 2 ; $\frac{13}{6}$.
2) En utilisant les propriétés du produit scalaire démontrez les relations (1) et (2)

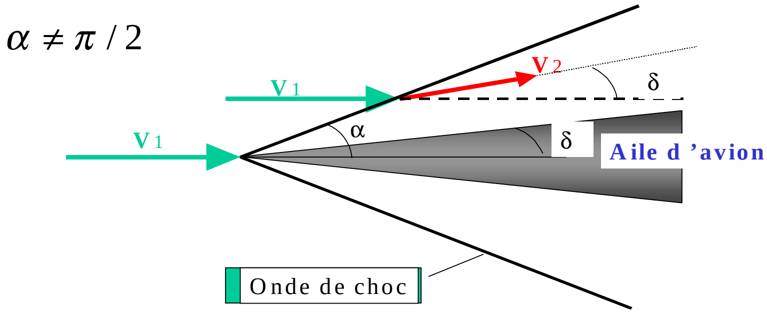
$$\overrightarrow{P'F} \bullet \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FP} \bullet \overrightarrow{FQ} \quad (1) \text{ et } \left(\overrightarrow{FB}\right)^2 = -\overrightarrow{FA} \bullet \overrightarrow{FQ} \quad (2).$$

En déduire $(P'F)^2 = (PF)^2 . \dfrac{\overline{QF}}{\overline{FA}}$ (3).

3) Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on pose $\overrightarrow{OP'} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$; écrire la relation (3) dans la configuration particulière de la question 1).

II) ECOULEMENT SUPERSONIQUE AU BORD D'ATTAQUE D'UNE AILE D'AVION

Schéma 1 :



Dans une soufflerie on envoie de l'air à une vitesse $\overrightarrow{V_1}$ sur une aile d'avion schématisé ci-dessus en coupe transversale. Le bord d'attaque est représenté par une forme simple : un V de demi-angle au sommet δ. Le vecteur $\overrightarrow{V_1}$ est dans le plan de symétrie de l'aile ; l'arête de l'aile est perpendiculaire à $\overrightarrow{V_1}$. En vitesse supersonique, il se forme une surface de compression de l'air, très mince, appelée onde de choc. Elle a la forme d'un dièdre, de demi-angle au sommet α (différent de $\pi/2$) qui s'attache au bord de l'aile (schéma 1). En traversant cette surface la vitesse du courant d'air subit un changement brutal de direction et d'intensité. Les lois de l'aérodynamique permettent de représenter le phénomène par le schéma 2 avec les relations (R_1) indiquées en légende.

On se propose, pour une vitesse $\overrightarrow{V_1}$ et un δ donnés, de déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_2}$ derrière le choc et la direction de l'onde de choc (α).

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on définit le point M par $\overrightarrow{OM} = u_2\vec{i} + v_2\vec{j}$, $u_2\vec{i}$ est la composante du vecteur $\overrightarrow{V_2}$ dans la direction de $\overrightarrow{V_1}$.

1) Démontrez que $V_{N2} = V_1 \sin\alpha - \dfrac{v_2}{\cos\alpha}$. En appliquant la relation (R_1) démontrez que :

$$V_1^2 \sin^2\alpha - V_1 v_2 \tan\alpha = 1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) V_1^2 \cos^2\alpha \qquad (R_2)$$

Exprimez les expressions de $\tan\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ en fonction de V_1, u_2, v_2. (On utilisera $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha}$).

En déduire la relation $\left(R_3\right)$: $$v_2^2\left[u_2-\frac{2}{1+\gamma}V_1-\frac{1}{V_1}\right]=(V_1-u_2)^2\left[\frac{1}{V_1}-u_2\right]$$

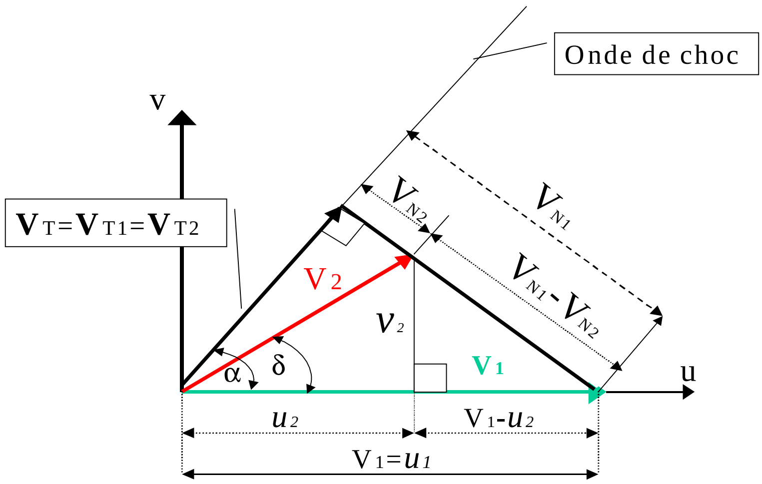
2) **Application numérique** : $\gamma=1.4$ (Coefficient de l'air) ; $V_1=2$ (Mach2).

Exprimer $\left(R_3\right)$ et donner une construction géométrique de l'ensemble (E) des points M. Préciser l'allure de (E) sur la figure de la partie I.

La courbe représentant (E) est connue sous le nom de « folium de DESCARTES ». Elle est désignée sous le nom de polaire de choc en aérodynamique.

Prendre un point M sur (E) ; en déduire $\overrightarrow{V_2}$ et la direction de l'onde de choc.

Schéma 2



$$\mathbf{V}_{\mathrm{T1}}=\mathbf{V}_{\mathrm{T2}}=\mathbf{V}_{\mathrm{T}} \quad \text{et}$$

loi aérodynamique de Prandlt, $$\mathbf{V}_{\mathrm{N1}}.\mathbf{V}_{\mathrm{N2}}=1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\mathbf{V}_{\mathrm{T}}^2 \qquad [R_1]$$