Sujets non retenus pour la session 2002

La cellule académique, constituée de professeurs et chargée de faire des propositions de sujets pour les olympiades académiques de mathématiques, a relevé dans le cours de son travail quelques énoncés qu'elle n'a pas conservés pour la compétition. Ils peuvent avoir été écartés pour des raisons de longueur (ou de brièveté), de difficulté ou de technicité. Certains peuvent avoir semblé trop "connus" (ce point de vue est naturellement subjectif). Ils n'avaient pas la forme olympique.

Une sélection de ces énoncés (dont la mise en forme éventuelle est laissée à l'appréciation des professeurs) est proposée ici. Les noms des auteurs ne sont pas donnés car on n'est jamais sûr d'être absolument original dans ce domaine.

Le site académique remercie chaleureusement ces auteurs inconnus.

Sujet n°1

Soit ABC un triangle.
On considère les six triangles formés en traçant ses trois médianes.
Dans chacun de ces triangles, on trace le cercle inscrit. On obtient donc six cercles.
Prouver que si quatre de ces six cercles ont le même rayon, alors le triangle ABC est équilatéral.

Sujet n°2

Soit un parallélogramme ABCD de centre O. Soit F un point du segment [AC] distinct de O, de A et de C.
La parallèle à (AB) passant par F coupe (BC) en E et (AD) en G. La parallèle à (AD) passant par F coupe (AB) en K et (CD) en I.

1. Démontrer que les droites (KG) et (EI) sont parallèles.
2. Démontrer que les droites (KE) et, (AC) et (GI) sont concourantes.

Sujet n°3

Soient m, n et p trois nombres réels positifs tels que : $\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

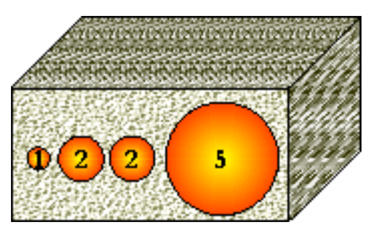
Démontrer que le système : $\left\{\begin{array}{rcl}\sqrt{x-m}+\sqrt{y-m} & = & 5\\ \sqrt{y-n}+\sqrt{z-n} & = & 5\\ \sqrt{z-p}+\sqrt{x-p} & = & 5\end{array}\right.$ admet une solution unique.

Sujet n°4

Pour M élément de $\mathbb{N}^*$, on appelle boîte de poids de taille M une boîte constituée de poids qui permettent de mesurer les masses entières comprises entre 1 et M.

A. Etude d’un exemple

On considère la boîte de poids ci-contre.



a. Montrer que l’on peut obtenir toutes les masses comprises entre 1 et 10.

b. Quel poids faudrait-il ajouter pour obtenir une boîte de poids de taille 20 ?

c. Montrer qu’alors certaines masses peuvent être obtenues de plusieurs manières.

B. Boîte de poids parfaite : analyse

On dit qu'une boîte de poids est parfaite lorsque les poids qui la composent sont tous différents et que toutes les masse ne peuvent être obtenues que d'une seule manière. On suppose qu'une telle boîte existe, et on note $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les poids qui la composent, rangés dans l'ordre croissant.

1. Quelle est la valeur de p_1 ?
2. Quelle est la seule boîte de poids parfaite de taille 1 ? de taille 3 ? de taille 7 ?
3. Démontrer par récurrence sur n que :
4. Tout m élément de $\left\{1; 2; \ldots; \sum_{i=1}^{n} p_i\right\}$ est mesurable avec les poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i + 1$
5. Déterminer les cinq premier poids. Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la valeur de p_k ?

C. Obtention d'une boîte de poids parfaite universelle

On considère une boîte constituée d'une infinité de poids p_k où $p_k = 2^{k-1}$, k étant un entier naturel non nul. Démontrer que toute masse entière supérieure ou égale à 1 peut être obtenue comme somme de poids de cette boîte et ce de manière unique.

Sujet n°5

On appelle tétraèdre trirectangle de somme O tout tétraèdre ayant trois arêtes deux à deux orthogonales sécantes en O.
On donne une sphère (S) passant par O et on considère les tétraèdres trirectangles de sommet O dont les arêtes coupent la sphère (S) en trois points A, B et C.
Montrer que le plan (ABC) passe par un point fixe.

Sujet n°6

Sur le côté [BC] d'un triangle ABC, on place un point P.
Construire sur l'un des côtés de ce triangle un point F, de telle sorte que le segment [PF] partage le triangle ABC en deux partie d'aires égales.

Sujet n°7

On lance 15 fois consécutivement une pièce de monnaie et on note dans l'ordre la face obtenue. Un résultat est représenté par PFFP....F, par exemple (on a obtenu PILE au premier lancer, FACE au deuxième et au troisième, etc., FACE au quinzième).
1598 personnes réalisent cette expérience, et on constate qu'aucune d'entre elles n'a obtenu PILE à deux lancers consécutifs.
Peut-on affirmer que deux personnes au moins ont obtenu les mêmes résultats (c'est-à-dire les mêmes suites de P et F) ?