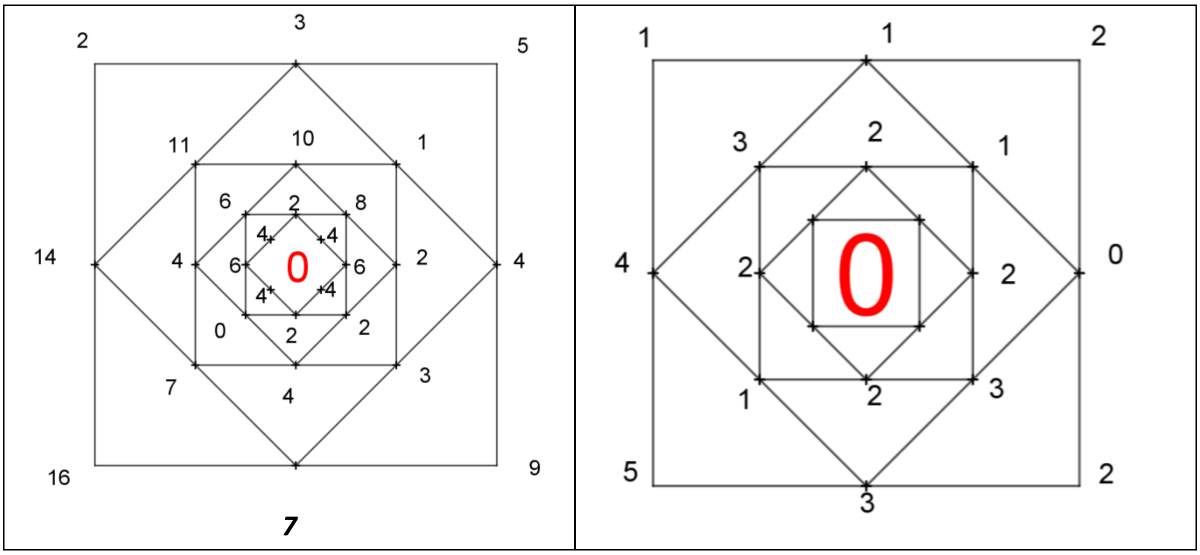
Olympiades nationales 2020
Zone Amériques
Éléments de solution

Exercice 2
Le jeu des quatre nombres

Première partie

1.



2.

Une étape	Deux étapes	Trois étapes	Huit étapes
Toute suite de quatre entiers identiques donne quatre zéros à la première étape.	Toute suite (a,b,a,b) donne une suite formée de quatre nombres identiques à la première étape, et quatre zéros à la seconde	Dans le premier exemple, on a vu que $(2,0,6,8)$ donne quatre zéros en trois étapes.	Le premier exemple donne une suite terminant par quatre zéros en sept étapes. On peut la « remonter » en $(1,3,8,17)$ en une suite terminant en huit étapes.

3. Par définition, $Q^{(1)} = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$

4. Si $(1,8,21,45)$ était le dérivé de (a,b,c,d), on aurait $[a-b] = 1, |b-c| = 8, |c-d| = 21, |d-a| = 45$. Mais, selon les propriétés de la valeur absolue, $|d-a| = |d-c+c-b+b-a\,| \leq |d-c| + |c-b| + |b-a|$, ce qui donnerait $45 \leq 1+8+21$, ce qui n'est pas.

5. On place dans cet algorithme un compteur, nommé par exemple « durée » et les quatre nombres a, b, c et d. Une boucle while conditionnée par la non nullité d'au moins un des quatre augmente « durée » d'une unité.

```
duree_max = 0
for a in range(100):
    for b in range(100):
        for c in range(100) :
            for d in range(100) :
                duree = 0
                at = a
                bt = b
                ct = c
                dt = d
                while not(at==0 and bt==0 and ct==0 and dt==0) :
                    duree +=1
                    e = at
                    f = bt
                    g = ct
                    h = dt
                    at = abs(e-f)
                    bt = abs(f-g)
                    ct = abs(g-h)
                    dt = abs(h-e)
                    if (duree > duree_max):
                        duree_max = duree
                        am=a
                        bm=b
                        cm=c
                        dm=d
print(duree_max)
print(am,bm,cm,dm)
```

Seconde partie

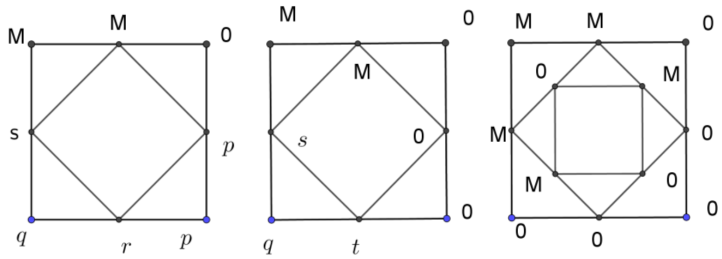
1. ***a.*** Ou bien les quatre entiers initiaux sont pairs, c'est terminé. Ou bien l'un d'eux est impair et les trois autres pairs, il y a alors deux différences paires successives et deux différences impaires successives (successives dans le mouvement circulaire). À l'étape suivante, pairs et impairs alternent, pour ne donner que des différences impaires et enfin des différences paires. Le cas où au départ deux nombres sont pairs et deux impairs vient d'être évoqué au passage. Enfin, s'il y a au départ un pair et trois impairs, dès la première dérivation on est dans un des cas précédents.

b. La différence entre deux doubles est le double de la différence… Tous les nombres intervenant dans les dérivés successifs sont les doubles de ceux intervenant dans le vol du quadruplet initial. La moitié de 0 étant 0…

2. ***a.*** Quels que soient les entiers naturels a et b : $|a-b| \leq Max\{a,b\}$, d'où le résultat.

b. Si ce maximum est voisin d'un 0, il reste le maximum à l'étape suivante.

c. Ce qui précède prouve que la suite des $Max(Q^n)$ est décroissante jusqu'au stade où ce maximum est voisin d'un 0. Les schémas ci-dessous montrent que la décroissance stricte vers 0 est réalisée en quelques étapes :

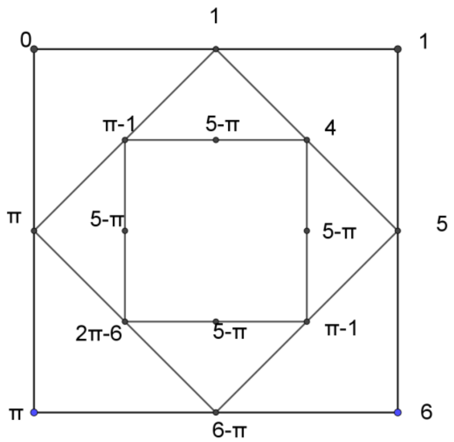


- si le maximum a un voisin nul, ce n'est plus le cas en une étape ;
- si les trois autres nombres sont nuls, on parvient à quatre nombres identiques ;
- si deux autres nombres sont nuls, ils sont bientôt réduits à un s'ils sont voisins et produisent en deux étapes quatre nombres identiques s'ils sont de part et d'autre du maximum.

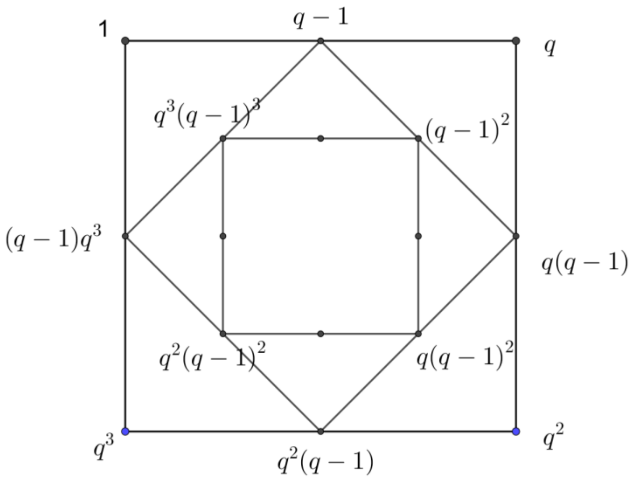
En conclusion, la suite des maximums est une suite d'entiers naturels pour laquelle existe un entier p tel que pour tout entier n $Max\left(Q^{(n+p)}\right) < Max\left(Q^{(n)}\right)$ (l'étude précédente montre que $p \leq 4$). Cette suite est constante égale à 0 au-delà d'un certain rang.

Troisième partie

1. Le quadruplet proposé conduit à $(0,0,0,0)$ comme le prouve le schéma ci-contre.



2. Les premiers calculs font apparaître :



En tenant compte du fait que $1+q+q^2=q^3$. Un raisonnement par récurrence montrerait les quatre nombres apparaissant à l'étape n sont les produits des puissance de q (de 0 à 3) par $(q-1)^n$. On n'obtiendra pas 0.