Mardi 16 juillet 2019

Problème 1. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous les entiers a et b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Problème 2. Soit A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC. Soit également P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point, situé sur la droite (PB_1), tel que B_1 se retrouve strictement entre P et P_1, et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. De même, soit Q_1 un point, situé sur la droite (QA_1), tel que A_1 se retrouve strictement entre Q et Q_1, et tel que $\widehat{CQ_1Q} = \widehat{CBA}$.

Démontrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Problème 3. Un réseau social compte 2019 membres. Certains de ces membres sont amis l'un avec l'autre, la relation d'amitié étant réciproque. Des événements du type décrit ci-dessous surviennent successivement, l'un après l'autre :

> Soit A, B et C trois membres tels que A soit ami avec B et C, mais que B et C ne soient pas amis ; alors B et C deviennent amis, mais A n'est plus ami ni avec B, ni avec C. Les autres relations d'amitié entre membres ne changent pas durant cet événement.

Initialement, 1010 membres ont 1009 amis chacun, et 1009 membres ont 1010 amis chacun. Démontrer qu'il existe une suite de tels événements à la suite desquels chaque membre aura au plus un ami.

Language: French

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 7 points

Mercredi 17 juillet 2019

Problème 4. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (k, n) tels que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Problème 5. La banque de Bath a émis des pièces dont une face est marquée de la lettre H et l'autre face est marquée de la lettre T. Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Morgane retourne la $k^{\text{ème}}$ pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, elle s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration THT sera

$$THT \to HHT \to HTT \to TTT;$$

Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations.

(a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opérations que va réaliser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, $L(THT) = 3$ et $L(TTT) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $AB \neq AC$. On note ω le cercle inscrit dans ABC, I le centre de ω, et D, E et F les points de tangence respectifs de ω avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit R le point de ω, autre que D, tel que la droite (DR) soit perpendiculaire à (EF). Soit P le point d'intersection, autre que R, entre la droite (AR) et le cercle ω. Enfin, soit Q le point d'intersection, autre que P, entre les cercles circonscrits à PCE et à PBF.

Démontrer que les droites (DI) et (PQ) sont sécantes en un point appartenant à la perpendiculaire à (AI) passant par A.