Le jeu des cavaliers

Thoralf Albert SKOLEM s'est intéressé à l'étude d'une famille de suites d'entiers satisfaisant à des contraintes simples, les « suites de Skolem » : étant donné un entier n, par exemple 4, et on veut ranger les nombres 1, 2, 3 et 4 répétés deux fois, soit dans ce cas 8 nombres en tout, de telle sorte que deux apparitions d'un même nombre soient distantes de la valeur de ce nombre.

Ceci signifie que les deux 1 sont contigus, les deux 2 sont séparés par un seul nombre, etc. Le problème posé est de déterminer toutes les suites de Skolem, et bien évidemment la réponse dépend du nombre n.

Le mathématicien Jean BRETTE a donné à cette recherche le nom de « jeu des cavaliers » parce qu'on peut en effet penser aux deux occurrences d'un nombre dans une suite de Skolem comme aux deux jambes d'un cavalier. La quête des suites de Skolem pour le nombre n est donc équivalente à la détermination de toutes les façons de positionner n cavaliers, dont les jambes sont respectivement écartées de 1, 2, 3, … n cases de sorte qu'il n'y ait jamais aucun espace laissé libre entre eux.

Cette façon de considérer le problème a l'avantage de lui donner un tour manipulatoire, bien que cette traduction requiert un peu d'imagination pour trouver une façon dont les cavaliers ne se « marchent pas sur les pieds ».

Ce qui fait le sel du jeu des cavaliers est qu'il n'a pas de solutions pour certains nombres n. On constate aisément ce fait pour $n = 2$, et avec un petit peu plus de travail pour $n = 3$.

Une exploration systématique permet de voir que, pour $n = 4$. il y a exactement 6 solutions. La recherche est un peu plus laborieuse pour $n = 5$, et l'est évidemment plus pour les nombres plus grands, surtout que le nombre de solutions pour $n = 8$ est déjà 504, et 455 936 pour $n = 12$.

Ce qui fait le sel de l'étude de ce jeu est le fait qu'il n'a pas de solutions pour beaucoup de nombres n. Il convient donc de passer de la recherche infructueuse à l'établissement de la propriété du nombre n qui a pour conséquence qu'il n'existe aucun arrangement de n cavaliers sans que les cavaliers se marchent sur les pieds ou laissent un espace entre eux.

Plusieurs variantes des suites de Skolem, donc du jeu des cavaliers, ont été étudiées comme les suites de Skolem circulaires qu'on peut réaliser ainsi : dans une planchette, percer $2n$ trous régulièrement espacés sur un cercle, et se munir de n demi-cercles de taille croissante qui puissent relier les trous contigus, puis de 2 en 2, de 3 en 3, etc. jusqu'aux points diamétralement opposés en s'enfichant dans les trous menagés à cet effet. Se pose alors naturellement la question : peut-on relier les solutions du « jeu des cavaliers circulaire » à celles du jeu des cavaliers classique ? La solution est assez subtile, certaines propriétés persistant et d'autres disparaissant.