ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 3**

Parution lundi 30 janvier **Retour attendu pour le jeudi 16 février**

Exercice 1 – Suites et probabilités

Propriété : si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p\,(A) + p(B)$.
Cette propriété s'étend à une union finie d'événements deux à deux incompatibles.
Propriété : Soient A et B des événements tels que $p(B) \neq 0$; alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s'appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.
On extrait au hasard un jeton de l'urne et l'on note sa couleur.
Un jeu consiste à extraire un jeton de l'urne :

- Si le jeton est bleu, le jeu s'arrête et l'on a gagné.
- Si le jeton est noir, le jeu s'arrête et l'on a perdu.
- Si le jeton est vert, on le replace dans l'urne et l'on recommence l'épreuve.

Soit n un entier naturel non nul. On fixe à n le nombre d'itérations de l'épreuve précédente (qui peut s'interrompre avant le rang n si l'on a au préalable perdu ou gagné)
Pour tout entier $k \geq 1$ inférieur ou égal à n, on note :

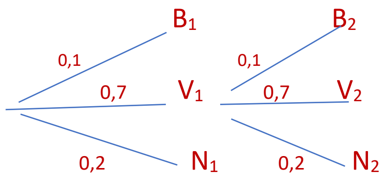
- B_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est bleu »
- N_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est noir »
- V_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est vert »
- G_n l'événement « on a gagné à un rang k inférieur ou égal à n »
- P_n l'événement « on a perdu à un rang k inférieur ou égal à n »

1. On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
   a. Représenter l'épreuve à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Calculer la probabilité de chacun des événements V_2, G_2, P_2.

2. n désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement v_n, g_n, p_n la probabilité des événements V_n, G_n, P_n .
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; établir l'expression du terme général en fonction de n.
   b. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Justifier que $p(B_k) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p(N_k) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $g_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.
   d. Exprimer g_n et p_n en fonction de l'entier n.
   e. Etudier la convergence éventuelle des suites $(v_n), (g_n), (p_n)$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $g_n > 0{,}32$.

1. ***a.*** Le jeton est tiré au hasard, ce qui assure l'équiprobabilité, puis remis dans l'urne après chaque tirage. Les données du problème en pourcentages se traduisent donc par l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) = (p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$
$G_2 = B_1 \cup B_2$ et les événements B_1, B_2 sont incompatibles
donc $p(G_2) = p(B_1) + p(B_2) = p(B_1) + p(V_1) \times p_{V_1}(B_2) = 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}17$.
$P_2 = N_1 \cup N_2$ et les événements N_1, N_2 sont incompatibles

donc $p(N_2) = p(N_1) + p(V_1) \times p_{V_1}(N_2) = 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}34$.

2. ***a.*** Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p(V_n) = p(V_{n-1}) \times p_{V_{n-1}}(V_n) = 0{,}7v_{n-1}$, ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Donc $v_n = v_1 \times 0{,}7^{n-1} = 0{,}7^n$.

b. Pour que l'événement B_k soit réalisé, il faut et il suffit que les événements $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, B_k$ soient réalisés dans cet ordre. Ainsi $B_k = V_{k-1} \cap B_k$ donc $p(B_k) = p_{V_{k-1}}(B_k) \times p(V_{k-1}) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$.
De même $p(N_k) = p_{V_{k-1}}(N_k) \times p(V_{k-1}) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.

c. $G_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, les événements étant deux à deux incompatibles.
Donc $g_n = p(B_1) + p(B_2) + \cdots + p(B_n) = 0{,}1 + 0{,}1 \times v_1 + \cdots + 0{,}1 \times v_{n-1} = 0{,}1 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1}$
$P_n = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$, les événements étant deux à deux incompatibles.
Donc $p_n = p(N_1) + p(N_2) + \cdots + p(N_n) = 0{,}2 + 0{,}2 \times v_1 + \cdots + 0{,}2 \times v_{n-1} = 0{,}2 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1}$

d. $g_n = 0{,}1 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1} = 0{,}1 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{1}{3}(1 - 0{,}7^n)$ et $p_n = 0{,}2 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1} = 0{,}2 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{2}{3}(1 - 0{,}7^n)$

e. Puisque $0 < 0{,}7 < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{3}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul,
$g_n > 0{,}32 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1 - 0{,}7^n) > 0{,}32 \Leftrightarrow 1 - 0{,}7^n > 0{,}96 \Leftrightarrow 0{,}04 > 0{,}7^n$
Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $]0\,;+\infty[$ et par les propriétés du logarithme, on obtient
$0{,}04 > 0{,}7^n \Leftrightarrow \ln(0{,}04) > \ln(0{,}7^n) \Leftrightarrow \ln(0{,}04) > n\ln(0{,}7) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}7)} < n$ car $\ln(0{,}7) < 0$
Une calculatrice donne pour valeur approchée : $\frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}7)} \approx 9{,}024$; donc à partir du rang $n = 10$, on aura $g_n > 0{,}32$.

N.B. Après avoir montré que la suite (g_n) est croissante (puisque $0 < 0{,}7 < 1$), on peut aussi programmer les termes de la suite (g_n) sur calculatrice ou écrire un algorithme avec une boucle « while » qui s'arrête dès que g_n dépasse 0,32.

Exercice 2 – Comparaison de moyennes

On montre que pour tout entier n tel que $n \geq 1$, la fonction f définie sur **R⁺** par $f(x) = x^n$ est dérivable (donc continue) sur **R⁺** et strictement croissante sur **R⁺**. Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que f est une bijection de **R⁺** sur **R⁺** et admet donc une bijection réciproque g définie sur **R⁺**. On dit que g est la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on note pour tout x de l'intervalle **R⁺**, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est strictement croissante et vérifie les propriétés suivantes :
Pour tous réels a et b positifs $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, si de plus $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

<u>Rappel :</u> pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et pour tout entier $n \geq 1$, $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln a$.
Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d'un produit.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique m, la moyenne géométrique g et la moyenne harmonique h de ces réels par :

$m = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ $\qquad g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ $\qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Appliquer l'inégalité précédente successivement aux nombres $\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}$ pour comparer les nombres g et m.
3. Appliquer aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ l'inégalité trouvée précédemment pour les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et en déduire une inégalité entre m et h.

1. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$. Cette fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Sur $]0,+\infty[$, $f'(x)$a le signe de $x - 1$. La fonction f est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Son minimum est donc $f(1) = 0$. La fonction f est donc positive et **pour tout réel $\boldsymbol{x > 0, \ln x \leq x - 1}$**.
2. Pour tout entier k compris entre 1 et n, $\frac{a_k}{m} > 0$, on peut donc écrire $\ln\frac{a_k}{m} \leq \frac{a_k}{m} - 1$. En additionnant membre à membre ces n inégalités, on obtient : $\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{a_k}{m} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k}{m} - n$.
   Or $m = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, ce qui s'écrit aussi $n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{m}$. L'inégalité précédente s'écrit donc $\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{a_k}{m} \leq 0$.
   D'autre part, $\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{a_k}{m} = \ln\frac{a_1}{m} + \ln\frac{a_2}{m} + \ldots + \ln\frac{a_n}{m} = \ln\left(\frac{a_1}{m} \times \frac{a_2}{m} \times \ldots \times \frac{a_n}{m}\right)$.
   Ce logarithme népérien est négatif ou nul si et seulement si $\frac{a_1}{m} \times \frac{a_2}{m} \times \ldots \times \frac{a_n}{m} \leq 1$ soit $a_1 a_2 \ldots a_n \leq m^n$
   Soit $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq m$. On a donc bien $\boldsymbol{g \leq m}$.
3. En appliquant l'inégalité précédente aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$,
   on obtient $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \times \frac{1}{a_2} \times \ldots \times \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \frac{1}{h}$ soit $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$. Comme les nombres g et h sont strictement positifs, cela équivaut à $\boldsymbol{g \geq h}$.

Exercice 3 – Fonction convexe

L'étude des variations d'une fonction dérivable s'appuie le plus souvent sur le signe de sa fonction dérivée, les valeurs où celle-ci s'annule ne suffisant pas pour déterminer ce signe.

Propriété : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative. C admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0.

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

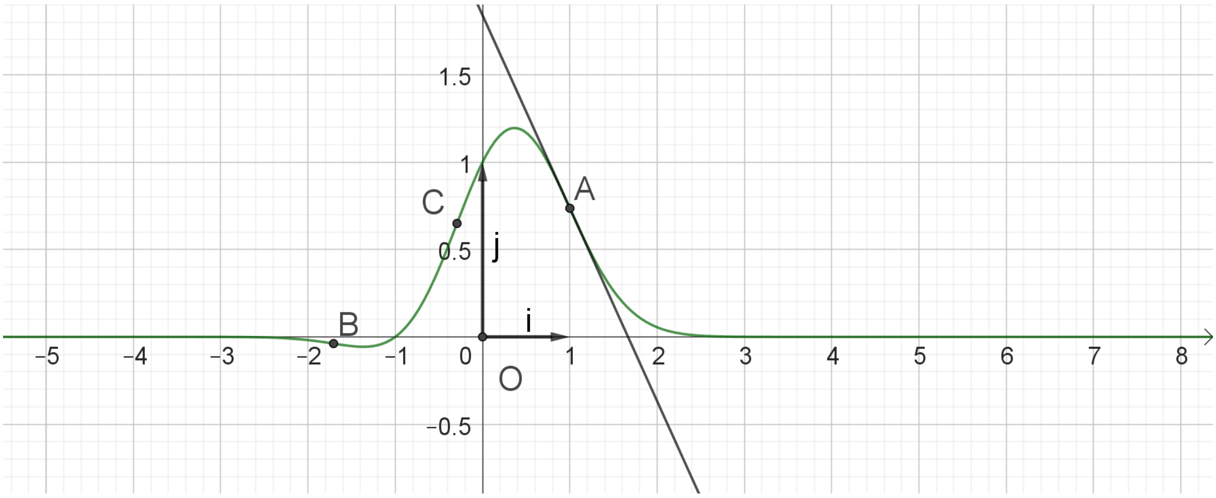
1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathcal{C}$.

1. Par produit et composition, la fonction f est dérivable sur **R** et pour tout réel x,
   $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x^2} + (1+x) \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (-2x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x^2}$.
   Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-2x^2 - 2x + 1$.
   Le discriminant de l'équation $-2x^2 - 2x + 1 = 0$ est $\Delta = 12$. Les solutions de l'équation sont donc :
   $x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Comme le coefficient de x^2 est négatif, on en déduit que $f'(x)$est positif sur $[x_1, x_2]$ et $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.
   La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, x_1]$, croissante sur $[x_1, x_2]$ et décroissante sur $[x_2, +\infty[$.
2. Par produit et composition, la fonction f' est dérivable sur **R** et pour tout réel x,
   $f''(x) = (-4x - 2)\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x^2 - 2x + 1)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (4x^3 + 4x^2 - 6x - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$
   Soit $f''(x) = 2(2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $f''(x)$ a le signe de $2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$.
   Soit $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. On constate que 1 est une solution de $P(x) = 0$. On cherche donc trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   soit $P(x) = ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c$.
   L'égalité est vérifiée **pour tout réel $\boldsymbol{x}$** si et seulement si $\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = 2 \\ -b + c = -3 \\ -c = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \\ c = 1 \end{cases}$

On étudie donc le signe de $P(x) = (x-1)(2x^2+4x+1)$. Le discriminant de $2x^2+4x+1=0$ est $\Delta = 8$ et ses solutions sont $x_3 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $x_4 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4} = -\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que $f''(x)$ a le signe de $(x-1)(x-x_3)(x-x_4)$ et qu'elle s'annule en changeant de signe en trois points A, B, C de la courbe $\mathcal{C}$, points d'abscisses respectives $1, x_3, x_4$.

3. La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3\mathrm{e}^{-1}(x-1) + 2\mathrm{e}^{-1}$
Soit $y = -3\mathrm{e}^{-1}x + 5\mathrm{e}^{-1}$.



Exercice 4 – Encadrement de $\ln(1+x)$

Rappels :

- pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence ;
- pour déterminer le signe d'une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s'annule ;
- on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ;
- pour déterminer une limite, on peut chercher à appliquer le théorème des gendarmes.

1. Etudier le sens de variation puis le signe des fonctions suivantes :

a. La fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$.

b. La fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

c. La fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ par $h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}\right)$.

2. En déduire que :

a. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

b. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3. Etudier la limite éventuelle en 0 de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. *a.* La fonction f est, par somme et composition, dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$,
$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}(1 + x - x(1+x) + x^2(1+x) - 1)$
Soit $f'(x) = \frac{1}{1+x}(1 + x - x - x^2 + x^2 + x^3 - 1) = \frac{x^3}{1+x}$.
Sur $]-1,+\infty[$, $1+x > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de x^3 c'est-à-dire de x. La fonction f est donc décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. La fonction f admet donc un minimum en 0. Or $f(0) = -\ln 1 = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f(x) \geq 0$.

b. La fonction g est, par somme et composition, dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \in [0,+\infty[$,
$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1}{1+x}(1 - (1-x)(1+x)) = \frac{1}{1+x}(1 - (1-x^2)) = \frac{x^2}{1+x}$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) \geq 0$ donc la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$. Or $g(0) = \ln 1 = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

c. La fonction h est, par somme et composition, dérivable sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, et pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$,

$h'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + 2x^2) = \frac{1}{1+x}\left(1 - (1+x)(1 - x + 2x^2)\right)$

Soit $h'(x) = \frac{1}{1+x}\left(1 - (1 - x + 2x^2 + x - x^2 + 2x^3)\right) = \frac{1}{1+x}(1 - 1 - x^2 - 2x^3) = \frac{-1}{1+x}(x^2 + 2x^3)$

Soit $h'(x) = \frac{-x^2}{1+x}(1 + 2x)$. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $\frac{-x^2}{1+x} \leq 0$ et $1 + 2x \geq 0$ donc $h'(x) \leq 0$.

La fonction h est donc décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Or $h(0) = \ln 1 = 0$.

On en déduit que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $h(x) \geq 0$.

2. ***a.*** On a démontré que :

pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ soit $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x)$

et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$ soit $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$. Or $[0, +\infty[\subset]-1, +\infty[$.

On en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

b. De même**,** on a démontré que :

pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ soit $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x)$

et pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $h(x) \geq 0$ donc $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}$. Or $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \subset]-1, +\infty[$.

Donc, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ donc $-\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Donc pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$, $-\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$ car $x^2 > 0$.

On en déduit, par encadrement, que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

De même, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ donc $-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Donc, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$ car $x^2 > 0$.

On en déduit, par encadrement, que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Au final, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Aires, intégrales et inégalités

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on définit l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ comme l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentant la fonction f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire peut être majorée, minorée, encadrée par des sommes d'aires de rectangles ou de trapèzes lorsque la fonction est monotone et convexe ou concave, ce qui permet soit de déterminer une valeur approchée de l'aire soit d'obtenir des inégalités.

Définition : une fonction est dite convexe lorsque pour tous points A et B de sa courbe représentative, le segment [AB] est situé au-dessus de la courbe.

Propriété 1 : si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

Propriété 2 : si une fonction f est convexe sur un intervalle I alors, sur l'intervalle I, la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes.

On sait que si a et b sont deux réels strictement positifs alors $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que si $0 < a < b$ alors $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe représentative sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Montrer que $a < \frac{a+b}{2} < b$ et que $a < \sqrt{ab} < b$.
2. En partageant l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles comme sur la figure 1 ci-dessous, et en considérant la tangente à la courbe au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ montrer que si $0 < a < b$ alors $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$.
3. En effectuant un autre partage de l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles, comme sur la figure 2 ci-dessous, montrer que si $0 < a < b$ alors $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

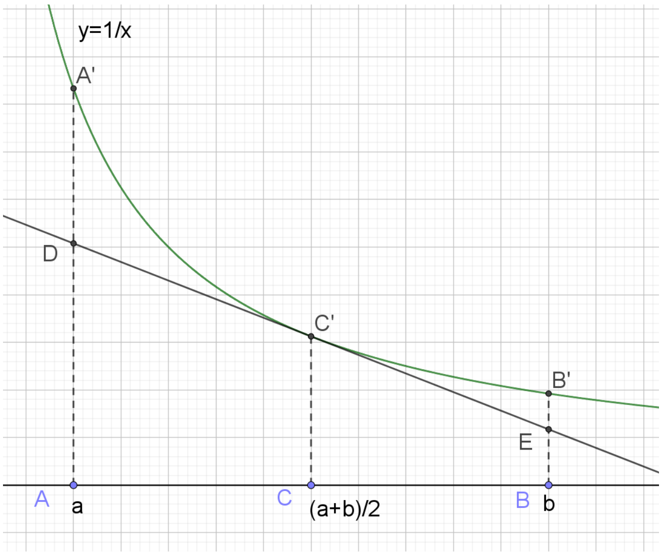


Figure 1

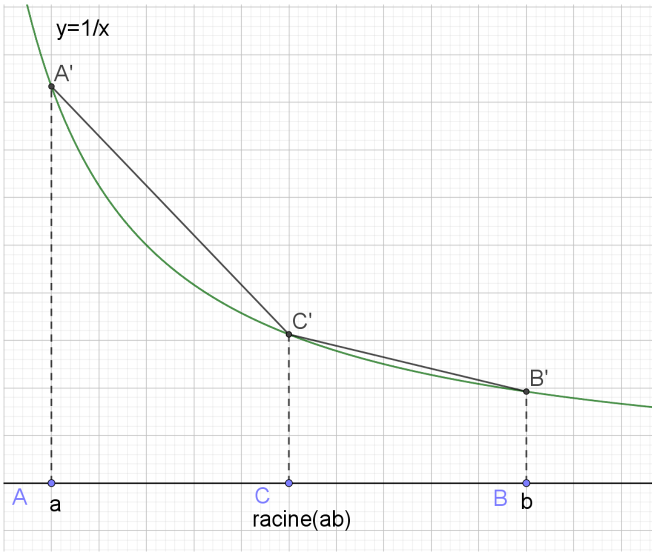


Figure 2

1. Si $0 < a < b$ alors $b - a > 0$. Or $\frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$ donc $\frac{a+b}{2} > a$ et $b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2}$ donc $\boldsymbol{\frac{a+b}{2} < b}$.
   D'autre part, comme a et $\sqrt{ab}$ sont positifs, les comparer revient à comparer a^2 et ab. Or $ab - a^2 = a(b-a)$ qui est un nombre positif donc $a < \sqrt{ab}$ et de même $b^2 - ab = b(b-a)$ qui est positif donc $\boldsymbol{\sqrt{ab} < b}$.
2. La fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus, f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ donc $f''(x) > 0$. La fonction f est donc convexe sur $]0, +\infty[$.
   On en déduit que, si a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$, la courbe est située au-dessus de sa tangente T au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$. Une équation de T est $y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
   Soit $f'(\frac{a+b}{2}) - \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = -\frac{4}{(a+b)^2}$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2}{a+b}$ donc une équation de T est $y = -\frac{4}{(a+b)^2}x + \frac{4}{a+b}$

   Comme $a < \frac{a+b}{2} < b$, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est supérieure à l'aire $\mathcal{A}'$ du trapèze de bases [AD] et [BE].
   Pour calculer cette aire calculons les ordonnées des points D et E.
   D est le point de T d'abscisse a. Son ordonnée vaut donc :
   $y_D = -\frac{4}{(a+b)^2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{2}{a+b} = \frac{2}{(a+b)^2}\big(-(2a-a-b) + (a+b)\big) = \frac{2}{(a+b)^2}(2b) = \frac{4b}{(a+b)^2}$.
   De même, $y_E = -\frac{4}{(a+b)^2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{2}{a+b} = \frac{2}{(a+b)^2}\big(-(2b-a-b) + (a+b)\big) = \frac{2}{(a+b)^2}(2a) = \frac{4a}{(a+b)^2}$.

On en déduit que $\mathcal{A}' = \frac{1}{2}(\mathrm{AD}+\mathrm{BE})(b-a) = \frac{1}{2} \times \frac{4(a+b)}{(a+b)^2} \times (b-a) = \frac{2}{a+b}(b-a)$.

Or $\mathcal{A} = \int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a$

D'où $\ln b - \ln a > \frac{2}{a+b}(b-a)$, ce qui équivaut puisque $\frac{a+b}{2} > 0$ et $\ln b - \ln a > 0$ (car $a < b$) à $\boldsymbol{\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a}}$

3. La fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$ et $a < \sqrt{ab} < b$, donc l'aire $\mathcal{A}$ est inférieure à la somme des aires des trapèzes ACC'A' et CBB'C'.
   L'aire du trapèze ACC'A' est égale à
   $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{AA}' + \mathrm{CC}')(\sqrt{ab} - a) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{a}\right)(\sqrt{ab} - a) = \frac{1}{2a\sqrt{ab}}(a + \sqrt{ab})(\sqrt{ab} - a) = \frac{ab - a^2}{2a\sqrt{ab}}$
   On calcule de la même façon l'aire $\mathcal{A}_2$ du trapèze CBB'C' :
   $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{CC}' + \mathrm{BB}')(b - \sqrt{ab}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b}\right)(b - \sqrt{ab}) = \frac{1}{2b\sqrt{ab}}(b + \sqrt{ab})(b - \sqrt{ab}) = \frac{b^2 - ab}{2b\sqrt{ab}}$
   D'où $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2ab\sqrt{ab}}\left(b(ab - a^2) + a(b^2 - ab)\right) = \frac{1}{2ab\sqrt{ab}}(2ab^2 - 2a^2b) = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.
   Comme $\mathcal{A} = \ln b - \ln a$ et $\mathcal{A} < \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, on obtient $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$ ce qui équivaut, puisque $\sqrt{ab} > 0$ et $\ln b - \ln a > 0$ (car $a < b$), à $\boldsymbol{\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a}}$

Exercice 6 : …le désordre, ça vous dérange ?

Définition : On appelle permutation des éléments de l'ensemble $E = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ toute liste à n éléments de E deux à deux distincts.

Propriété : le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n est $n\,! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$

Propriété : si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), alors

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Soit k un entier naturel non nul et une liste ordonnée $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de k éléments deux à deux distincts.
On appelle *dérangement* de la liste $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ toute permutation des éléments de la liste telle qu'aucun élément ne conserve la même place.
Exemple :
$(2,3,4,1)$ est un dérangement de la liste $(1,2,3,4)$.
$(1,4,3,2)$ n'est pas un dérangement de la liste $(1,2,3,4)$ car 1 et 3 conservent leurs places respectives.
On désigne par D_k le nombre de dérangements d'une liste à k éléments.

1. Ecrire tous les dérangements de chacune des listes suivantes : ***a.*** (1) ***b.*** $(1,2)$ ***c.*** $(1,2,3)$ ***d.*** $(1,2,3,4)$ et donner la valeur des nombres D_1, D_2, D_3, D_4.
2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et la liste des k entiers $L_k = (1,2,\dots,k)$.
   a. Montrer que le nombre de permutations laissant un unique élément de la liste L_k à sa place est kD_{k-1}.
   b. Déterminer le nombre de permutations laissant exactement deux éléments de la liste L_k à leur place.
   c. Établir la formule : $k\,! = 1 + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} \mathrm{D}_{k-i}$
3. À l'entrée d'une salle de spectacle au début du XX[ième] siècle, cinq hommes déposent au vestiaire leurs chapeaux respectifs. L'employé leur attribue les numéros de porte-manteaux 1, 2 ,3 ,4 ,5 mais en réalité dispose au hasard ces chapeaux sur les cinq porte-manteaux. Quelle est la probabilité qu'à la sortie, aucun des hommes ne se retrouve avec son propre chapeau ?

1. Il n'y a aucun dérangement de la liste (1) ; donc $D_1 = 0$
Il y a un seul dérangement de la liste (1,2) : la liste (2,1). Donc $D_2 = 1$.
Il y a deux dérangements de la liste (1,2,3) : les listes (3,1,2) et (2,3,1). Donc $D_3 = 2$.
Ecrivons les 24 permutations des entiers 1,2,3,4 et supprimons toutes les lignes pour lesquelles un nombre conserve sa place :

1	**2**	**3**	**4**	
1	2	3	4	
1	2	4	3	

1	3	2	4	
1	3	4	2	
1	4	2	3	
1	4	3	2	
2	1	3	4	
2	1	4	3	(2,1,3,4)
2	3	1	4	
2	3	4	1	(2,3,1,4)
2	4	1	3	(2,4,3,1)
2	4	3	1	
3	1	2	4	
3	1	4	2	(3,1,4,2)
3	2	1	4	
3	2	4	1	
3	4	1	2	(3,4,1,2)
3	4	2	1	(3,4,2,1)
4	1	2	3	(4,1,2,3)
4	1	3	2	
4	2	1	3	
4	2	3	1	
4	3	1	2	(4,3,1,2)
4	3	2	1	(4,3,2,1)

On trouve $D_4 = 9$.

2. ***a.*** Il y a k façons de choisir l'élément qui conserve sa place dans la liste L_k. Cet élément étant choisi, il y a D_{k-1} dérangements des $k-1$ autres éléments ne laissant aucun de ceux-là à leur place. Cela donne donc kD_{k-1}permutations laissant un seul élément à sa place.

b. Il y a $\binom{k}{2}$façons de choisir les deux éléments qui conservent leur place. Ces deux éléments étant choisis, il y a D_{k-2} dérangements des $k-2$ autres éléments ne laissant aucun de ceux-là à leur place. Cela donne donc $\binom{k}{2} D_{k-2}$ permutations laissant exactement deux éléments à leur place

c. On sait qu'il existe $k!$ permutations de la liste d'entiers $(1, 2, \dots, k)$.

Dénombrons ces permutations en les regroupant selon le nombre d'éléments qu'elles laissent à leur place.

Pour tout entier i compris entre 0 et k, désignons par P_i l'ensemble des permutations de $(1, 2, \dots, k)$ laissant exactement i éléments à leur place.

Soit P l'ensemble des permutations de $(1, 2, \dots, k)$. $P = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$ et les ensembles $P_0, P_1, \dots, P_k$ sont deux à deux disjoints, donc $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(P_0) + \mathrm{Card}(P_1) + \dots + \mathrm{Card}(P_k)$.

Or $\mathrm{Card}(P) = k!$, $\mathrm{Card}(P_k) = D_k$ puisque les éléments ne conservent aucun élément à leur place.

$\mathrm{Card}(P_1) = kD_{k-1}$ d'après la question **2.*a.***

$\mathrm{Card}(P_2) = \binom{k}{2} D_{k-2}$ d'après la question **2.*b.***

De la même manière, pour $0 \le i \le k-2$, $\mathrm{Card}(P_i) = \binom{k}{i} D_{k-i}$.

Observons qu'il n'existe aucune permutation laissant $k-1$ éléments à leur place (puisque si $k-1$ éléments restent à leur place, le k-ième aussi) donc $\mathrm{Card}(P_{k-1}) = 0$.

Observons enfin qu'il n'existe qu'une permutation laissant les k éléments à leur place, donc $\mathrm{Card}(P_k) = 1$.

On obtient donc $k! = D_k + kD_{k-1} + \binom{k}{2} D_{k-2} + \dots + \binom{k}{k-2} D_2 + 0 + 1 = 1 + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k}{i} D_{k-i}$.

3. Déposer au hasard les cinq chapeaux 1, 2, 3, 4, 5 sur les cinq porte-manteaux 1, 2, 3, 4, 5 c'est effectuer une permutation des éléments 1, 2, 3, 4, 5. Il y a donc 5 ! =120 permutations que l'on supposera équiprobables.

L'événement « aucun des hommes ne retrouve son chapeau » est l'ensemble des dérangements de la liste (1, 2, 3, 4, 5).

D'après le résultat établi à la question **2.*c.***, $5! = 1 + D_5 + 5D_4 + \binom{5}{2} D_3 + \binom{5}{3} D_2$ ce qui équivaut à :

$120 = 1 + D_5 + 5 \times 9 + 10 \times 2 + 10 \times 1$ soit $D_5 = 120 - 1 - 45 - 20 - 10 = 44$.

La probabilité qu'aucun homme ne retrouve son chapeau est : $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$

Exercice 7 – Histoires de tétraèdre

Propriété : soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$. Alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$.

Définition : on dit qu'une droite de l'espace est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

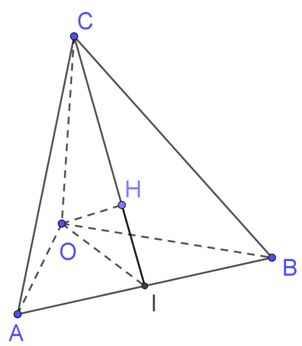
Propriété : si une droite de l'espace est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est perpendiculaire à ce plan.

Méthode : pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut :

- montrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs de ces droites est nul ;
- montrer qu'une des droites est perpendiculaire à un plan contenant l'autre droite (en montrant qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan)..

Soit OABC un tétraèdre tel que les triangles $\mathrm{OAB}, \mathrm{OAC}$ et OBC sont isocèles rectangles en O. Soit I milieu de $[\mathrm{AB}]$, H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIC.

1. ***a.*** Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
   b. Que représente le point H pour le tétraèdre OABC ?
   c. Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. On pose $\mathrm{OA} = a$.
   a. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
   b. En déduire que $\mathrm{OH} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
3. Soit D le symétrique du point H par rapport à O.
   a. Démontrer que $\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.
   b. Déterminer les coordonnées des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ et montrer que ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).



1. ***a.*** Les triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O donc OA = OB = OC. De plus, ils sont rectangles en O, donc, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient
   $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = \mathrm{OA}\sqrt{2}$. En particulier le triangle ABC est équilatéral. Le milieu I de [AB] est donc aussi le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Or, par définition H appartient à (CI) donc $\overrightarrow{\mathrm{CH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$.
   D'autre part, (OC) est orthogonale à (OA) et (OB) sécantes en O donc (OC) est orthogonale au plan (ABC) et donc en particulier à (AB). On a donc
   $\overrightarrow{\mathrm{OH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}}\right).\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$.
   On en déduit que la droite (OH) est orthogonale à la droite (AB).
   b. Par définition de H, (OH) est perpendiculaire à (CI). Donc (OH) est orthogonale aux droites (AB) et (CI) sécantes en I. La droite (OH) est donc orthogonale au plan (ABC) et le point H est le pied de la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC.
   c. La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) donc à la droite (BC). D'autre part (OA) étant orthogonale à (OB) et (OC), elle est orthogonale au plan (OBC) donc à (BC). Or (OA) et (OH) sont deux droites sécantes du plan (AOH) donc (BC) est orthogonale à (AOH) et donc à la droite (AH) incluse dans ce plan. C'est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Or ce triangle étant équilatéral, la médiane (CI) qui passe par le point H est aussi hauteur. On en déduit que le point H est orthocentre de ABC et donc aussi son centre de gravité.
2. ***a.*** Comme (OC) est orthogonale à (OA) et (OB), O est le pied de la hauteur issue de C dans le tétraèdre OABC. De plus le triangle OAB est rectangle en O. Le volume de ce tétraèdre est donc

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathrm{OC} \times \mathcal{A}_{\mathrm{OAB}} = \frac{1}{3}a \times \frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}{2} = \frac{a^3}{6}$.

b. D'autre part, H est le pied de la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathrm{OH} \times \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$.

Or $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{CI}$ puisque I est le pied de la hauteur issue de C dans ABC.

On a vu que $\mathrm{AB} = a\sqrt{2}$. CI est la hauteur dans un triangle équilatéral de côté a$\sqrt{2}$ donc $\mathrm{CI} = a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit $\mathrm{CI} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. On en déduit $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\, a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2}{4} \times 2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Au final, $OH = \frac{3\,\mathcal{V}}{\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

3. ***a.*** Les droites (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux perpendiculaires et OA = OB = OC = a. Donc les vecteurs $\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires.

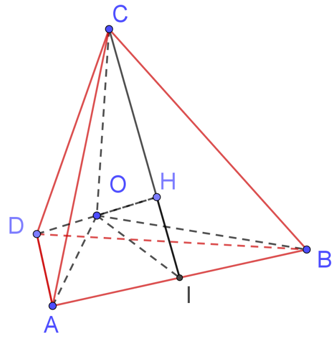
$\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ est donc bien un repère orthonormal de l'espace.

b. Dans ce repère, on a A(a,0,0), B(0,a,0) et C(0,0, a). Déterminons les coordonnées du point D.

Par définition de D,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{IH}} = -\overrightarrow{\mathrm{OI}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.

(voir l'exercice 7 partie B de la fiche 2).



Le point I étant le milieu de [AB], on a $\mathrm{I}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ a \end{pmatrix}$

Le point D et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ ont donc pour coordonnées :

$x_c = -\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{3}$, $y_c = -\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{3}$ et $z_c = -\frac{a}{3}$.

On en déduit :

$\mathrm{AD}^2 = \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{18}{9}a = 2a$ d'où $\mathrm{AD} = a\sqrt{2}$.

$\mathrm{BD}^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{18}{9}a = 2a$ d'où $\mathrm{BD} = a\sqrt{2}$.

$\mathrm{CD}^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 = \frac{18}{9}a = 2a$ d'où $\mathrm{CD} = a\sqrt{2}$.

Et on avait vu que $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = a\sqrt{2}$.

Le tétraèdre ABCD est donc bien un tétraèdre régulier.

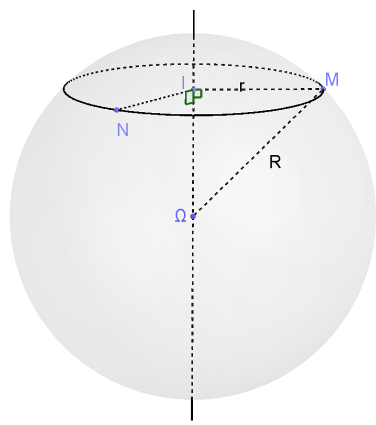
Exercice 8 – Intersection sphère plan

La distance d'un point A à un plan P est la distance entre le point A et son projeté orthogonal H sur le plan, c'est-à-dire le point d'intersection entre le plan P et la perpendiculaire au plan P passant par A.

L'intersection d'une sphère S de centre Ω et d'un plan P peut être :

- l'ensemble vide ;
- un point (le plan P est alors tangent à la sphère S) ;
- un cercle

suivant que la distance du centre de la sphère au plan est respectivement supérieure, égale ou inférieure au rayon R de la sphère.



Dans le cas où l'intersection est un cercle, si on note I son centre et r son rayon alors la droite $(\Omega\mathrm{I})$ est perpendiculaire au plan P donc orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété : si P est un plan passant par un point B et si $\vec{n}$ est un vecteur normal de P, alors la distance $d(A,P)$ d'un point A au plan P est $d(A,P) = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

1. Démonstration et application de la propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$, où $a \neq 0$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $B(x_B, y_B, z_B)$ un point du plan P. On note H le projeté orthogonal de A sur P.

a. Montrer que, si $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan P, alors $|\overrightarrow{AB}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.

b. En déduire l'expression de la distance du point A au plan P en fonction de $x_A, y_A, z_A, a, b, c, d$.

2. On considère la sphère S de centre $\Omega(1,2,-1)$, de rayon $R=4$ et le plan P d'équation $2x+y+2z=k$ où k est un réel quelconque.
   a. Déterminer, suivant les valeurs de k, l'intersection de la sphère S avec le plan P.
   b. Dans le cas où $k=-7$, déterminer les éléments caractéristiques de l'intersection de la sphère S avec le plan P.

1. a. $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right).\vec{n} = \overrightarrow{AH}.\vec{n}+\overrightarrow{HB}.\vec{n}$.

   Le point H est l'intersection du plan P avec la droite perpendiculaire à P passant par A et le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan P donc $\overrightarrow{HB}.\vec{n}=0$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \overrightarrow{AH}.\vec{n}$.

   Or les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et forment donc un angle de mesure 0 ou π. Le cosinus de cet angle vaut donc ± 1 d'où $|\overrightarrow{AB}.\vec{n}| = |\overrightarrow{AH}.\vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.

   b. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et comme P a pour équation $ax+by+cz+d=0$, on peut prendre $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Alors $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (x_B - x_A)a + (y_B - y_A)b + (z_B - z_A)c = ax_B + by_B + cz_B - (ax_A + by_A + cz_A)$.

   Or le point B appartient à P donc $ax_B + by_B + cz_B + d = 0$

   d'où $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -(ax_A + by_A + cz_A) - d$ et $|\overrightarrow{AB}.\vec{n}| = |ax_A + by_A + cz_A + d|$

   D'autre part, $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

   Au final $d(A,P) = AH = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2. a. La distance du point $\Omega(1,2,-1)$ au plan P d'équation $2x+y+2z-k=0$ est égale à $d(\Omega,\mathrm{P}) = \frac{|2+2-2-k|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2-k|}{3}$ et le rayon de la sphère S est 4.

   L'intersection de la sphère S avec le plan P est donc :

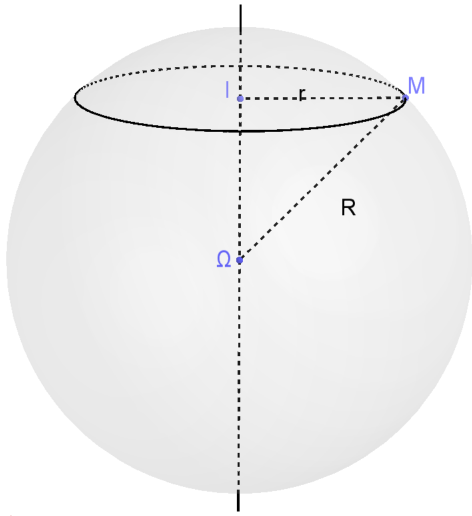
   - l'ensemble vide si $\frac{|2-k|}{3} > 4$ soit $|2-k| > 12$ soit $2-k \in]-\infty,-12[\, \cup\,]12,+\infty[$ soit $k \in]-\infty,-10[\, \cup\,]14,+\infty[$;
   - réduit à un point si $|2-k| = 12$ soit $k \in \{-10,14\}$ et le plan est alors tangent à la sphère S ;
   - un cercle si $\frac{|2-k|}{3} < 4$ soit $|2-k| < 12$ soit $k \in]-10,14[$.

c. Si $k=-7$, nous sommes dans le cas où $|2-k|<12$ donc l'intersection entre la sphère S et le plan P est un cercle C.

Soit I le centre, r le rayon et M un point du cercle C. Comme la droite $(\Omega\mathrm{I})$ est perpendiculaire au plan P, le triangle MI Ω est rectangle en I d'où $r^2+\Omega\mathrm{I}^2=R^2$.

Or $\Omega\mathrm{I}=\frac{|2-k|}{3}=3$ et $R=4$ d'où $r^2=16-9=7$

Le cercle C a donc pour rayon $r=\sqrt{7}$ et son centre I est un point du plan P dont une équation est $2x+y+2z=-7$ tel que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ soit vecteur directeur de la droite $(\Omega\mathrm{I})$, ce qui signifie



qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}=\lambda\vec{n}$ soit $\begin{cases}x_I-1=2\lambda\\y_I-2=\lambda\\z_I+1=2\lambda\end{cases}$ soit $\begin{cases}x_I=1+2\lambda\\y_I=2+\lambda\\z_I=-1+2\lambda\end{cases}$.

En reportant dans l'équation $2x+y+2z=-7$ du plan P,

on obtient : $2(1+2\lambda)+(2+\lambda)+2(-1+2\lambda)=-7$ soit $9\lambda=-9$ soit $\lambda=-1$ ce qui donne $I(-1,1,-3)$ comme centre du cercle C.