ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

Fiche numéro 3

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées d'ici le lundi 21 décembre à l'adresse euler.pepiniere@ac-versailles.fr sous forme numérique (format .pdf ou image) par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

Exercice 3. 1 Pour réviser sa table des nombres premiers

Pour chaque nombre réel positif x, on définit $f(x)$ comme étant le nombre de nombres premiers p qui vérifient $x \leq p \leq x + 10$. Quelle est la valeur $de\ f(f(2021))$?

Exercice 3. 2 Tournoi entre amis

Quatre joueurs de tennis, Alain, Bianca, Chen et Dave, participent à un tournoi dans lequel on joue un total de trois matchs, indépendants les uns des autres. Tout d'abord, on choisit au hasard deux joueurs afin qu'ils s'affrontent lors d'un premier match. Les deux autres joueurs s'affrontent également lors d'un deuxième match. Les vainqueurs des deux premiers matchs s'affronteront lors d'un troisième match pour le titre de champion du tournoi.
Alain, Bianca et Chen sont tous les trois des joueurs de même niveau (c'est-à-dire chacun d'eux a une même probabilité de victoire contre chacun des deux autres joueurs lors d'un match, soit une probabilité de $\frac{1}{2}$). Lorsque Dave affronte chacun des trois autres joueurs, sa probabilité de victoire est égale à p.
Déterminer, en fonction de p, la probabilité que Bianca gagne le titre de champion du tournoi.

Exercice 3. 3 En suspension

Trois tiges de métal minces, de longueurs 9, 12 et 15, sont soudées pour former un triangle rectangle que l'on place dans un plan horizontal. Une sphère de rayon 5 est placée de manière à reposer dans le triangle. Elle est alors tangente à chacun des côtés.
Si on néglige l'épaisseur des tiges, quelle est la hauteur du haut de la sphère par rapport au plan du triangle?

Exercice 3. 4 Solutions pour une solution

Quel est le plus petit entier positif k pour lequel l'équation $\sqrt{x-127} + \sqrt{k-x} = 13$ a au moins une solution ?
Quelles sont les solutions correspondant à cette valeur de k?

Exercice 2. 5 Suite d'entiers

On considère une suite de nombres entiers $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ telle que x_0 est positif ou nul et pour tout entier n, $x_{n+1} = (x_n)^2 + 1$.
1. Démontrer que pour tout entier x_0 choisi au départ, $x_2 - x_0$ est un entier pair.
2. Démontrer que pour tout entier x_0 choisi au départ, $x_6 - x_0$ est un multiple de 10.

Problème 3. 6 Passage de canards

La chasse est une activité controversée, mais dans cet exercice le chasseur rate à tout coup.

On considère l'application f qui à tout couple d'entiers naturels (x, y) associe l'entier défini par

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2.$$

1. ***a.*** Démontrer que pour tout couple (x, y) d'entiers

$$(P_1) \qquad f(3x + 4y, 2x + 3y) = f(x, y).$$

b. Démontrer que si x, y, u, v sont des entiers, alors

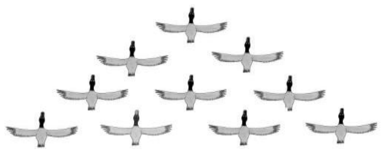
$$(P_2) \qquad f(x, y)f(u, v) = f(xu + 2yv, xv + yu)$$

2. ***a.*** Vérifier que le couple $(45,2)$ est solution de l'équation $f(x, y) = 2017$.
En déduire deux autres couples solutions de cette équation.
b. Déterminer un couple solution de chacune des équations suivantes

$$f(x, y) = 4034 \qquad\qquad f(x, y) = -\,2017$$

3. On se propose de déterminer des couples solutions de l'équation (E) : $f(x, y) = 3$.
a. Montrer que si (a, b) est solution de cette équation, alors a est impair.
b. On pose $a = 2a' + 1$. Montrer que b est impair.
c. En posant $b = 2b' + 1$, démontrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

4. On admet que les canards migrateurs, lorsqu'ils se déplacent, constituent des vols ayant la forme suivante dite en triangle.

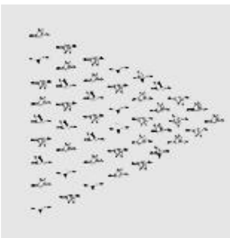


Si un vol de n rangées est complet, le nombre de canards de ce vol est égal à

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tartarin raconte qu'un jour où il était à la chasse il a vu arriver un vol complet de canards, **entre cent et mille** à coup sûr ! Son coup de fusil ne tua aucun oiseau mais, surpris, les volatiles se scindèrent en deux groupes formant deux triangles complets de même effectif.
a. Montrer que si a et b désignent respectivement le nombre de rangées du grand et des petits triangles alors $f(2a + 1, 2b + 1) = -1$.
b. Quel peut être le nombre de canards aperçus par Tartarin ?

5. Tartarin raconte encore que le lendemain un autre vol de canards, encore plus important que la veille, **entre mille et deux mille**, est passé au-dessus de sa tête. Son coup de fusil n'a encore touché aucun oiseau mais le vol s'est soudain mis en forme de carré avant de se séparer quelques instants plus tard en deux vols triangulaires d'effectifs différents.



Avant le coup de fusil

Après le coup de fusil

Après la séparation

Quel est l'effectif total des canards et celui de chacun de ces deux vols ?