



**ACADÉMIE  
DE VERSAILLES**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*

## Pépinière académique de mathématiques

Stage « en ligne » de novembre et décembre 2020

### Fiche numéro 2

Les propositions de solution de chaque exercice doivent être renvoyées d'ici le lundi 14 décembre à l'adresse [euler.pepiniere@ac-versailles.fr](mailto:euler.pepiniere@ac-versailles.fr) sous forme numérique (format .pdf ou image) par les professeurs selon les modalités précisées dans le courrier envoyé dans les lycées (envoi des propositions d'au plus deux équipes).

#### Exercice 2. 1 Bataille d'exposants

Sachant que  $2^{200} \times 2^{203} + 2^{163} \times 2^{241} + 2^{126} \times 2^{277} = 32^n$ , quelle est la valeur de  $n$  ?

#### Exercice 2. 2 Équations en chaîne

Déterminer tous les triplets de réels  $(x, y, z)$  vérifiant le système d'équations :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-3)(z+2) = 0 \\ x + yz = 9 \end{cases}$$

#### Exercice 2. 3 Contact

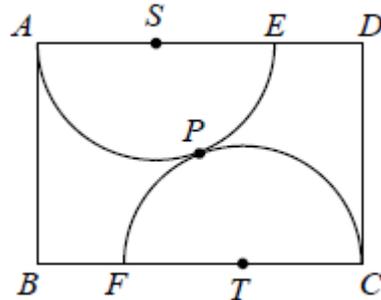
Dans la figure ci-contre, on considère le rectangle  $ABCD$  tel que :  $AB = 4$  et  $BC = 6$ .

Le demi-cercle de diamètre  $[AE]$  a pour centre  $S$ .

Le demi-cercle de diamètre  $[FC]$  a pour centre  $T$ .

Les deux demi-cercles, de centres  $S$  et  $T$  sont tangents au point  $P$  et ont le même rayon  $r$ .

Quelle est la valeur de  $r$  ?



#### Exercice 2. 4 Deux sacs de boules

Bruno et Crystel ont chacun un sac de 9 boules. Dans chaque sac, les boules sont numérotées de 1 à 9. Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule de leur propre sac.

Soit  $b$  la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Bruno et soit  $c$  la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Crystel.

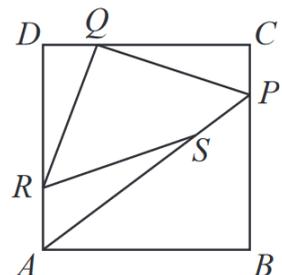
Déterminer la probabilité pour que la différence entre  $b$  et  $c$  soit un multiple de 4.

#### Exercice 2. 5 Partage d'un carré

On considère un carré  $ABCD$  dont les côtés ont pour longueur 4. Soit  $k$  un réel compris strictement entre 0 et 4, on considère les points  $P, Q, R, S$  situés respectivement sur les segments  $[BC], [CD], [DA], [AP]$  de manière que :

$$\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QD} = \frac{DR}{RA} = \frac{AS}{SP} = \frac{k}{4-k}$$

Quelle est la valeur de  $k$  qui minimise l'aire du quadrilatère  $PQRS$  ?



## Problème 2. 6

### A - Un résultat préliminaire

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $\neq 0$ .

On considère l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ , d'inconnue  $x$ .

1. Démontrer que si cette équation admet deux solutions distinctes, alors leur produit est égal à  $\frac{c}{a}$ .

2. Démontrer que si  $a$  et  $c$  sont de signes différents alors l'équation admet deux solutions distinctes de signes différents.

### B - Extraction de décimales

1. Soit  $x$  un nombre réel.

On appelle **partie entière** de  $x$  l'unique entier  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .

On note alors  $E(x)$  cet entier  $n$ .

Par exemple  $E(\sqrt{2}) = 1$  et  $E(100\sqrt{2}) = 141$ .

a. Donner  $E(10\pi)$ ,  $10E(10\pi)$  puis  $E(100\pi - 10E(10\pi))$ .

b. Vérifier que  $E(1000\pi - 10E(100\pi)) = 1$ .

c. Calculer  $E(10^k\pi - 10E(10^{k-1}\pi))$  pour l'entier  $k = 6$ .

2. On considère la fonction  $B$  qui, à un réel  $x$  associe le bloc des six chiffres qui suivent la virgule dans l'écriture décimale de  $x$  affichée par la calculatrice.

Par exemple  $B(\sqrt{2}) = 414213$  et  $B(1,05) = 050000$ .

a. Donner  $B(\pi)$ .

b. À l'aide de la question 1, écrire un algorithme permettant d'obtenir  $B(x)$  à chaque saisie de  $x$  par un utilisateur.

### C - La fonction « Password »

L'administrateur d'un site internet a créé un petit algorithme utilisant la fonction  $B$  précédente afin de générer automatiquement le mot de passe d'un utilisateur en fonction de sa date de naissance.

Pour la suite,  $j$  désigne le jour,  $m$  le mois et  $a$  l'année de naissance de l'utilisateur.

1. On considère l'équation (E) :  $jx^2 + mx + 1890 - a = 0$ .

Démontrer que, compte tenu des valeurs possibles pour  $j, m$  et  $a$ , cette équation admet deux solutions distinctes de signes différents. On notera, par la suite,  $r(j, m, a)$  la solution positive de cette équation.

2. On considère la fonction suivante :

Fonction Password( $j, m, a$ )

$r \leftarrow r(j, m, a)$

Renvoyer( $B(r)$ )

a. Que renvoie la fonction Password pour Mileva qui est née le 19 juin 1974 ?

b. Justifier que cette fonction permet toujours d'obtenir un mot de passe.

c. L'administrateur a décidé, pour des raisons de sécurité, que le mot de passe 000000 est interdit.

(i) Zinedine est né le 1<sup>er</sup> décembre 1998.

Vérifier que, dans ce cas, la fonction Password donne le mot de passe interdit.

(ii) Albert, qui n'est pas encore centenaire, a son anniversaire le fameux « Pi Day », c'est à dire le 14 mars. Sachant que la fonction Password lui attribue le mot de passe interdit, combien de bougies va-t-il souffler cette année ?