Propositions de solutions de quelques exercices de la pépinière de terminale 2023

Exercice 1 sur les fonctions de la pépinère de terminale 2023
Déterminer tous les triplets $(x\,;y\,;z)$ de réels strictement compris entre 0 et 1 vérifiant :
$$\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)=\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)\quad(1)$$

Autre proposition de solution :
Soit $(x\,;y\,;z)\in]0\,;1[^3$ un triplet solution de (1)
$$\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)=\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{xyz}\left(x^2+\frac{1}{2}-x\right)\left(y^2+\frac{1}{2}-y\right)\left(z^2+\frac{1}{2}-z\right)=\frac{1}{xyz}(z-xy)(x-yz)(y-zx)$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)=(z-xy)(x-yz)(y-zx)$$
D'après les propriétés de la forme canonique d'une fonction trinôme du second degré, le membre de gauche de cette égalité est minimal pour $x=y=z=\frac{1}{2}$ et la valeur de ce minimum est $\frac{1}{4^3}$.

En évaluant le membre de droite de l'égalité en $x=y=z=\frac{1}{2}$, on obtient également $\frac{1}{4^3}$.

Démontrons que la valeur maximale du membre de droite est $\frac{1}{4^3}$.

Au moins un des trois nombres $z-xy$, $x-yz$ et $y-zx$ doit être positif, sinon le produit est négatif et ne peut être égal au membre de gauche qui est strictement positif. Supposons que $y-zx$ soit positif. L'expression étant symétrique, les autres cas se traitent de façon analogue.
$$\begin{aligned}(z-xy)(x-yz)(y-zx)&=(xz-y(x^2+z^2)+xzy^2)(y-zx)\\&\leq(xz-2xyz+xzy)(y-zx)\quad\text{en utilisant l'inégalité }-(x^2+z^2)\leq-2xz\\&\leq xz(1-2y+y^2)(y-zx)\\&\leq xz(y-zx)(y-1)^2\end{aligned}$$
Le trinôme en xz du second degré $-(zx)^2+y(zx)$ atteint son maximum en $xz=\frac{y}{2}$.

En substituant xz par $\frac{y}{2}$ dans le membre de droite de l'inégalité, on obtient:
$$(z-xy)(x-yz)(y-zx)\leq\frac{y^2}{4}(y-1)^2.$$
Enfin, après l'étude des variations de la fonction $y\rightarrow y(y-1)$ puis de son carré sur $]0\,;1[$ on obtient l'inégalité recherchée : $(z-xy)(x-yz)(y-zx)\leq\frac{1}{4^3}$

Conclusion
$$\frac{1}{4^3}\leq\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)=(z-xy)(x-yz)(y-zx)\leq\frac{1}{4^3}$$
donc $\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4^3}$ et l'unique solution de l'équation est le triplet $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Remarque

Dans cette démarche, on a cherché le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x)=(z-xy)(x-yz)(y-zx)$ sur la boule ouverte de centre $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 sur les fonctions de la pépinière de terminale 2023

Soit x, y, z des réels strictement positifs et deux à deux distincts.

Montrer que $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}\geq\dfrac{4}{xy+yz+zx}$.

Autre proposition de solution

x, y et z jouant des rôles symétriques, il suffit de démontrer l'inégalité dans le cas $x<y<z$.
Plaçons nous dans ce cas.

Soit f la fonction définie sur $[0;y[$ par $f(m)=\dfrac{1}{(m-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-m)^2}-\dfrac{4}{my+yz+zm}$.

Démontrer l'inégalité de l'énoncé revient à prouver que $f(x)\geq 0$.

Démontrons que $f(0)\geq 0$:

$$\begin{aligned}
f(0)&=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(y-z)^2}-\frac{4}{yz}.\\
&=\frac{z^2(y-z)^2yz+y^2(y-z)^2yz+y^2z^2yz-4y^2z^2(y-z)^2}{y^2z^2(y-z)^2yz}\\
&=\frac{(z^2+y^2-4yz)(y-z)^2+y^2z^2}{y^2z^2(y-z)^2}\\
&=\frac{[(x-y)^2-2yz](y-z)^2+y^2z^2}{y^2z^2(y-z)^2}\\
&=\frac{(y-z)^4-2yz(y-z)^2+y^2z^2}{y^2z^2(y-z)^2}\\
&=\frac{[(x-y)^2-xy]^2}{y^2z^2(y-z)^2}\geq 0
\end{aligned}$$

La fonction f est dérivable sur $[0;y[$ et $\forall m\in[0;y[$,

$$f'(m)=-\frac{2}{(m-y)^3}-\frac{2}{(z-m)^3}+\frac{4(z+y)}{(my+yz+zm)^2}$$

$m<y<z$ donc $m-z<m-y<0$, puis $-\dfrac{2}{(m-y)^3}-\dfrac{2}{(z-m)^3}>0$.

On en déduit que $\forall m\in[0;y[$, $f'(m)>0$. f est donc strictement croissante sur $[0;y[$

$0<x<y$ et f est strictement croissante sur $[0;y[$, donc $0\leq f(0)<f(x)$ soit $f(x)>0$. CQFD

Remarques

L'inégalité, reste vraie si l'un des trois réels est nul. On peut donc retirer le strictement de l'énoncé de l'exercice.

Les cas d'égalités ne peuvent d'ailleurs pas être obtenus si les trois réels sont non nuls.

Exercice 7 sur les fonctions de la pépinière de terminale 2023
Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$ $f(f(m)+f(n))=m+n$.

Autre proposition de solution
Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant une telle propriété.

Démontrons que pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, si $f(m)=f(n)$, alors $m=n$. (*)
(Autrement dit, que tout élément de $\mathbb{N}^*$ admet au plus un antécédent par f)
Soit $m \geq 1$ et $n \geq 1$ tels que $f(m)=f(n)$, on a alors $f(m)+f(1)=f(n)+f(1)$, puis $f(f(m)+f(1))=f(f(n)+f(1))$. En appliquant la propriété de l'énoncé à cette dernière égalité, on obtient $m+1=n+1$ et donc $m=n$. (*) est démontré.

Si $f(1)=1$ alors $f(2)=f(f(1)+f(1))=2$ puis $f(3)=f(f(1)+f(2))=3$ etc...
Un récurrence simple permet de montrer que pour tout entier naturel n non nul, $f(n)=n$.

Démontrons par l'absurde que $f(1)$ ne peut pas être différent de 1.
Si $f(1)=n$ avec $n>1$, alors on a aussi, $f(f(n-1)+f(1))=n$ et donc $1=f(n-1)+f(1)$ d'après la propriété (*).
f étant à valeur dans $\mathbb{N}^*$, $f(n-1)+f(1)>1$.
$1=f(n-1)+f(1)$ et $f(n-1)+f(1)>1$, donc $1>1$.
On a démontré que l'implication : « Si $f(1)\neq 1$, alors $1>1$ » était vraie, donc, par contraposée, 1 n'étant pas strictement supérieur à 1, on a nécessairement $f(1)=1$.

Conclusion Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 $f(n)=n$.
Autrement dit, f est la fonction identité de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 6 sur les suites de la pépinière de terminale 2023

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par:

$x_0=\frac{1}{10}$, $y_0=\frac{1}{8}$ et, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $x_{n+1}=x_n+x_n^2$ et $y_{n+1}=y_n+y_n^2$.

Existe-t-il des entiers naturels non nuls n et m tels que $x_n=y_m$?

<u>Autre proposition de solution</u>

On peut démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$ et $y_n>0$.

$x_0>0$ et $y_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n=x_n^2>0$ donc les deux suites sont strictement croissantes.

pour tout entier naturel $n\geq 1$, l'égalité $x_{n+1}=x_n+x_n^2$ est une équation du second degré en x_n de discriminant égal à $1+4x_{n+1}$ et donc, on a soit $x_n=\frac{1+\sqrt{1+4x_{n+1}}}{2}$, soit $x_n=\frac{1-\sqrt{1+4x_{n+1}}}{2}$.

Or x_n étant strictement positif, $x_n=\frac{1+\sqrt{1+4x_{n+1}}}{2}$. (*)

$y_0=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}$ et (y_n) est strictement croissante, donc il n'existe pas d'entier m tel que $y_m=x_0$.

$x_0=0{,}1$, $x_1=0{,}11$, $x_2=0{,}1221$, $x_3=0{,}1370>0{,}125=y_0$ et (x_n) est strictement croissante donc il n'existe pas d'entier n tel que $x_n=y_0$.

Supposons qu'il existe des entiers naturels non nuls n et m tels que $x_n=y_m$.

Soit n_0 le plus petit entier n tel que $x_n=y_m$ et m_0 un entier m tel que $x_{n_0}=y_m$.

D'après ce qui précède, m_0 et n_0 sont non nuls, x_{n_0-1} et y_{m_0-1} sont donc bien définis.

$x_{n_0}=y_{m_0} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{1+4x_{n_0}}}{2}=\frac{1+\sqrt{1+4y_{n_0}}}{2} \Leftrightarrow x_{n_0-1}=y_{n_0-1}$ d'après (*).

n_0-1 vérifie donc la relation $x_n=y_m$, ce qui contredit la minimalité de n_0.

Donc il n'existe pas d'entiers naturels m et n tels que $x_n=y_m$.

<u>Généralisation</u>

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par:

$x_0\in\mathbb{R}$ et $y_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $x_{n+1}=f(x_n)$ et $y_{n+1}=f(y_n)$ où f est une focntion bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Il existe des entiers naturels n et m tels que $x_n=y_m$ si, et seulement si, x_0 est un terme de la suite (y_n) ou y_0 est un terme de la suite (x_n).

<u>Démonstration</u>

f est une focntion bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe une fonction f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. (*)

On suppose qu'il existe des entiers naturels n et m tels que $x_n=y_m$.

Soit n_0 le plus petit entier n tel que $x_n=y_m$ et m_0 le plus petit entier m tel que $x_{n_0}=y_m$.

Si $n_0=0$ ou $m_0=0$ le résultat est validé.

Sinon, m_0 et n_0 sont non nuls donc x_{n_0-1} et y_{m_0-1} sont bien définis.

$x_{n_0}=y_{m_0} \Leftrightarrow f(x_{n_0-1})=f(y_{n_0-1}) \Leftrightarrow x_{n_0-1}=f^{-1}(f(y_{n_0-1})) \Leftrightarrow x_{n_0-1}=y_{n_0-1}$ d'après (*).

n_0-1 vérifie la relation $x_n=y_m$, cela contredit la minimalité de n_0.

Donc on a nécessairement $n_0=0$ ou $m_0=0$.

La réciproque est triviale.

<u>Remarque</u> La fonction f de l'énoncé original n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ On peut généraliser à une fonction de I dans I où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.