# *Thème : nombres*

**Exercice 1 Que des 8 et des 9**

Quel est le nombre entier $N$ qui s'écrit en système décimal avec 13 chiffres, uniquement des 8 et des 9, et qui est un multiple de $2^{13}$ ?

Pour tout entier $k$ inférieur à 13, on peut écrire : $N = A \times 10^k + B = C \times 2^{13}$, où $B$ est un nombre de $k$ chiffres. Comme $10 = 2 \times 5$, on en déduit que $B$ est divisible par $2^k$. On trouve ainsi, pour $k = 1$, le chiffre des unités de $N$, qui est donc 8, puis celui des dizaines (entre 88 et 98 on choisit 88), puis celui des centaines, qui est aussi 8. On peut continuer ainsi de proche en proche (on n'a que deux possibilités à examiner chaque fois).

Finalement, $N = 8\,898\,989\,989\,888$

**Exercice 2 La puissance sans la gloire**

On note $\mathrm{Ord}_2(m)$ l'exposant de 2 apparaissant dans la décomposition de $m$ en facteurs premiers (ou, si on veut, l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise $m$).

Pour quels entiers $n$ a-t-on :

1. $\mathrm{Ord}_2(3^n - 1) = 1$ ?
2. $\mathrm{Ord}_2(3^n - 1) = 2$ ?
3. $\mathrm{Ord}_2(3^n - 1) = 3$ ?

Ça va mieux quand on factorise : $3^n - 1 = (3 - 1)(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1})$

Le premier facteur est 2, le second facteur est impair s'il contient un nombre impair de termes, c'est-à-dire si $n$ est *pair*. Dans ce cas, $\mathrm{Ord}_2(3^n - 1) = 1$ .

Si $n$ est impair, on peut réécrire le second facteur : $(1 + 3) + 3^2(1 + 3) + \cdots + 3^{n-2}(1 + 3)$, et donc obtenir la factorisation $3^n - 1 = 8(1 + 3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{n-2})$. Ce qui prouve en passant qu'il n'y a pas d'entiers $n$ tels que $\mathrm{Ord}_2(3^n - 1) = 2$ Le second facteur de ce produit contient un nombre impair de termes impairs seulement dans le cas où il y a un nombre impair de nombres pairs entre 0 et $n - 2$ , donc si le reste de la division euclidienne de $n$ par 4 est 2. Dans ce cas, $\mathrm{Ord}_2(3^n - 1) = 3$ .

Il n' a pas de raison de s'arrêter. Par exemple, $3^4 - 1$est divisible par $2^4$.

**Exercice 3 Proportionnalité**

Les nombres entiers $a, b$ et $c$ s'écrivent, dans le système décimal, avec trois chiffres. Ces chiffres sont différents, et tous les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont utilisés.

Par ailleurs, la suite $a, b, c$ est proportionnelle à la suite 1, 3, 5.

Que sont $a, b$ et $c$ ?

Observons d'abord que $b = 3a$ et $c = 5a$. D'où on déduit que le chiffre le plus à gauche dans l'écriture de $a$ est 1 et que le chiffre des unités de $c$ est 5. Le chiffre des unités de $a$ est donc impair. Ce n'est pas 1. Si c'est 3, alors le chiffre des unités de $b$ est 9, si c'est 9, alors le chiffre des unités de $b$ est 7, et ce ne peut être 7, car alors le chiffre des unités de $b$ serait 1.

Examinons $a = 1x3$. Le chiffre des dizaines de $c$ est alors $1 + \mathrm{mod}\,(5x, 10)$, car $5 \times 3 = 15$, donc il y a une retenue, à laquelle il faut ajouter le reste modulo 10 du produit de 5 par $x$. Si $x$ est pair, on trouve un 1 comme chiffre des dizaines de $c$, donc $x$ est impair, et comme on a déjà utilisé 1, 5, 3 et 9, il ne reste que 7 comme possibilité. Or, $3 \times 173 = 519$, encore un 1 !

Examinons $a = 1x9$. Le chiffre des dizaines de $c$ est alors $4 + \mathrm{mod}(5x, 10)$. C'est donc 4 ou 9, mais 9 est déjà pris, donc c'est 4 et $x$ est pair. On peut regarder les trois possibilités qui demeurent :

$a = 129, a = 169$ et $a = 189$

Seule 129 est acceptable ($5 \times 189 = 945$, deux 9, et $5 \times 169 = 845$, mais $3 \times 169 = 507$, un 0 …)

Les trois nombres cherchés sont donc 129, 387 et 645

**Exercice 4 La Partie entière dans ses œuvres**

On rappelle que la fonction *Partie entière* associe à tout réel (dans l'exercice, ce sont des réels positifs) le plus petit entier qui lui soit inférieur ou égal. Dans cet exercice, on note $E$ la fonction *partie entière*. On a par exemple : $E(\pi) = 3$, $E(2 - 10^{-50}) = 1$.

On pose, pour tout $x$ , $f(x) = x \times E\left(x \times E\big(x \times E(x)\big)\right)$

1. Quelles images la fonction $f$ donne-t-elle des entiers ?
2. L'équation $f(x) = 2\,001$ possède-t-elle une solution ?
3. Et l'équation $f(x) = 2\,018$ ?

1. Pour tout entier $n$, $f(n) = n^4$. Par ailleurs, on peut observer que la fonction $f$ est croissante (le produit de nombres positifs ordonnés par des nombres positifs rangés dans le même ordre conserve l'ordre).

2. On peut procéder par tâtonnement pour trouver la solution, si elle existe, de l'équation $f(x) = 2\,001$.
On trouve : $f(6{,}99) = 1\,999{,}14$ et $f(6{,}999) = 2\,001{,}714$. On doit donc chercher la solution, si elle existe (un coup d'œil aux courbes représentatives des fonctions qui à $x$ associent $xE(x)$, $xE\big(xE(x)\big)$ montre que certains réels n'ont pas d'antécédents par elles) entre 6,99 et 6,999. Le tâtonnement peut rassurer mais ne prouve pas…
Remarquons qu'une solution de $f(x) = 2\,001$, qui vérifie donc $x = \frac{2\,001}{E(xE(xE(x)))}$ , est le quotient de deux entiers, donc un nombre rationnel.. Cela donne l'idée d'essayer le quotient de 2 001 par 286 (qui est le dénominateur du quotient précédent pour $x = 6,999$).

$$E\left(\frac{2\,001}{286}\right) = 6, \frac{2\,001}{286} \times 6 = \frac{6\,003}{143}, E\left(\frac{6\,003}{143}\right) = 41,$$
$$\frac{2\,001}{286} \times 41 = \frac{2\,001 \times 41}{286}, E\left(\frac{2\,001 \times 41}{286}\right) = 286 \text{ et } \frac{2\,001}{286} \times 286 = 2\,001$$

La solution de l'équation est bien $\frac{2\,001}{286}$ . Pour les amateurs d'approximations $\frac{2\,001}{286} = 6{,}9\overline{965034}$ (la suite de décimales 965034 se répète indéfiniment)

3. Pour $f(x) = 2\,018$ , une éventuelle solution est à chercher entre 6 et 7, puisque $f(6) = 1\,296$ et $f(7) = 2\,401$ mais, pour $x$ compris entre 6 et 7, $E\big(xE(x)\big)$ a pour maximum 41, $E\left(xE\big(xE(x)\big)\right)$ a pour maximum 286 et *f*(x) est majoré par 2002 (car $286 \times 7 = 2002$).

**Exercice 5 Trouver un rationnel dont on connaît le format et un encadrement**

On sait que $m$ et $n$ sont des entiers s'écrivant avec deux chiffres (chacun) dans le système décimal et que : $0{,}2328767 \leq \frac{m}{n} < 0{,}2328768$. Déterminer $m$ et $n$.

On peut essayer d'écrire 0,2328767 comme un rationnel et trouver les rationnels qui en sont proches. On écrit une sorte d'algorithme d'Euclide :

$$0{,}2328767 = \frac{1}{\frac{1}{0{,}2328767}} = \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{2\,328\,767}{684\,932}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{684\,932}{273\,971}}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{273\,971}{136\,990}}}}}$$

$$= \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{9}{136990}}}}}}$$

On remarque ( !) que, d'un étage à l'autre de ces développements, on passe d'un nombre plus grand (exemple $\frac{1}{4}$) à un nombre plus petit (exemple $\frac{1}{4+\frac{1}{3}} = \frac{3}{13} = 0,\overline{230769}$) que celui qu'on développe (cela se justifie par les résultats concernant l'ordre sur les quotients). On écrit $\frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{17}{73}$ . Ce nombre est plus grand que 0,2328767 et plus petit que 0,2328768, et il est bien le quotient de deux entiers compris entre 10 et 99. Il resterait à prouver qu'aucun autre du même format n'obéit eu même encadrement.

Une autre approche :

Remarquons d'abord que : $m < 0{,}2328768\, n \leq 0{,}2328768 \times 99$. Ainsi, $\boldsymbol{m \epsilon [\![10, 23]\!]}$.
En outre, par passage à l'inverse on a : $\frac{1}{0{,}2328767} \geq \frac{n}{m} > \frac{1}{0{,}2328768}$ puis, $\frac{m}{0{,}2328767} \geq n > \frac{m}{0{,}2328768}$.
Or, pour qu'un tel entier $n$ existe, il est nécessaire que $E\left(\frac{m}{0{,}2328767}\right)$ et $E\left(\frac{m}{0{,}2328768}\right)$ soient différentes.
En testant pour les quatorze valeurs de $m$ possibles, on constate que ceci n'est vérifié que pour $\boldsymbol{m = 17}$.

La fonction $x \mapsto \frac{17}{x}$ est strictement décroissante sur $[10\,; +\infty[$ (produit de $x \mapsto \frac{1}{x}$ par un réel positif).
On a donc : pour tout $n \leq 72, \frac{17}{n} \geq \frac{17}{72} \geq 0{,}236$ et pour tout $n \geq 74, \frac{17}{n} \leq \frac{17}{74} \leq 0{,}230$.
**Ainsi, si une solution à ce problème existe, ce ne peut être que $\frac{17}{73}$.**

Or, $\frac{17}{73} \approx 0{,}2328767123$. **Ainsi, on en conclut que $\frac{17}{73}$ est bien solution de ce problème et c'est la seule.**

## *Thème : suites et fonctions*

**Exercice 1** $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{98},\frac{1}{99}$ **…et après ?**

La fonction $f$ est une fonction polynôme de degré 98, telle que pour tout entier $k$ compris entre 1 et 99 on ait $f(k)=\frac{1}{k}$. Trouver $f(100)$.

Posons $g(x)=xf(x)-1$. La fonction $g$ est une fonction polynôme de degré 99, dont nous connaissons 99 racines, puisque, pour tout entier $k$ compris entre 1 et 99, $g(k)=k\times\frac{1}{k}-1=0$. Par conséquent, il existe $M$ tel que pour tout $x$ : $g(x)=M(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-98)(x-99)$. Comme $g(0)=-1$, il vient :
$-1\times-2\times-3\times\ldots\times-98\times-99M=-1$ et donc $M=\frac{1}{99!}$ (on rappelle que 99 ! se lit « factorielle 99 »).
On a donc $g(100)=1$ et $f(100)=\frac{g(100)+1}{100}=\frac{1}{50}$

**Exercice 2 Somme de sommes d'inverses de puissances**

On pose $(n)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots+\frac{1}{2\,017^n}+\frac{1}{2\,018^n}$. Calculer $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots$
(ou dire ce qu'on peut dire de la limite de cette somme infinie, dont il est déconseillé d'essayer de calculer chaque terme).

On peut (en fait, on ne peut pas) écrire les $f(n)$ les uns en dessous des autres. On aurait alors à calculer « verticalement » les : $S(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\cdots$ qui se révèlent être des sommes des termes de suites géométriques. Pa exemple, si on calcule la somme des premiers termes de $S(p)$, on trouve :

$$S(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\cdots\frac{1}{p^m}=\frac{1}{p^2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{p}}$$

Cette somme a une limite lorsque $m$ tend vers l'infini, c'est $\frac{1}{p(p-1)}$, car $\frac{1}{p}<1$.
C'est donc la somme des limites des résultats en colonne qu'on cherche. Cette somme est :

$$\Sigma(2\,018)=\frac{1}{2(2-1)}+\frac{1}{3(3-1)}+\frac{1}{4(4-1)}+\cdots+\frac{1}{2\,017(2\,017-1)}+\frac{1}{2\,018(2\,018-1)}$$

Chaque terme $\frac{1}{p(p-1)}$ peut s'écrire $\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}$. La somme $\Sigma(2\,018)$est télescopique, chaque terme sauf le premier et le dernier est compensé par le suivant. Finalement $\Sigma(2\,018)=1-\frac{1}{2\ \ 018}=\frac{2\,017}{2\,018}$

**Exercice 3 Tresse de suites**

Les nombres 308, 973, 1638, 2303, 2968, 3633, 4298 constituent une *progression arithmétique* (ce sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique). Existe-t-il des nombres entiers $a,b,c,d,e,f$ en *progression géométrique* (termes consécutifs d'une suite géométrique) tels que :
$308<a<\ 973<b<1\,638<c<\ 2\,303<d<\ 2\,968<e<\ 3\,633<f<\ 4\,298$ ?

Appelons $q$ la raison de la suite géométrique. On a $b=aq, c=aq^2, d=aq^3, e=aq^4, f=aq^5$.
Les produits de 972, 1 637, 2 302, 2 967, 3 632 respectivement par $q^5,q^4,q^3,q^2,q$ doivent demeurer supérieurs à 3 634. Par ailleurs, les produits de 309, 974, 1 639, 2 304, 2 969 respectivement par $q^5,q^4,q^3,q^2,q$ doivent demeurer inférieurs à 4 297.

| Maximum | 1,448 | 1,866 | 2,622 | 4,412 | 13,907 |
|---|---|---|---|---|---|
| encadrent | $q$ | $q^2$ | $q^3$ | $q^4$ | $q^5$ |
| Minimum | 1 | 1,224 | 1,578 | 2,219 | 3,74 |
| $q$ max | 1,448 | 1,367 | 1,379 | 1,5 | 1,693 |
| $q$ min | 1 | 1,106 | 1,164 | 1,22 | 1,301 |

On obtient cinq encadrements de , dont l'intersection est : $q\in]1{,}301\,;1{,}367[$
$q$ est un rationnel, quotient de deux entiers, tel que le produit de $q^5$ par un entier soit encore un entier. Le nombre $a$ est donc multiple de la cinquième puissance d'un entier. Comme $2^5=32, 3^5=243, 4^5=1\,024$ et que cette dernière

puissance est supérieure à 973, seuls $2^5$ et $3^5$ sont de dénominateurs acceptables. Mais aucun quotient d'entier par 2 n'est dans l'intervalle souhaité. Donc le dénominateur de $q$ est 3, et l'encadrement nous laisse la seule possibilité $= \frac{4}{3}$.
On cherche les multiples de 243 dans l'intervalle [309, 972] ; on trouve 486, 729 et 972, mais les produits de 486 et 729 par $\frac{4}{3}$ sont plus petits que 973. 972 est donc la seule possibilité, et les nombres cherchés, qui constituent la progression géométrique, sont : 972, 1 296, 1 728, 2 304, 3 072 et 4096.

**Exercice 4 Étude d'une suite d'entiers**

1. (*Rappel*) Montrer que si les entiers $a, b, c$ et $d$ sont tels que $a + b\sqrt{6} = c + d\sqrt{6}$, alors $a = b$ et $c = d$.

2. Montrer que, pour tout entier $n$, il existe des entiers $a_n$ et $b_n$ tels que $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n} = a_n + b_n\sqrt{6}$ et $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n} = a_n - b_n\sqrt{6}$. Calculer $a_2$ et $b_2$.

3. Montrer que, pour tout entier $n$ : $2a_n - 1 < \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n} < 2a_n$.

4. On appelle $d_n$ le chiffre des unités de $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}$ (ce nombre est irrationnel, on parle ici du chiffre situé immédiatement à gauche de la virgule dans l'écriture décimale – infinie). Quelle est la somme de tous les $d_n$ lorsque $n$ prend les valeurs entières de 0 à 2 018 ?

1. Cela tient à l'irrationalité de $\sqrt{6}$, qui ne peut s'écrire comme le quotient de deux entiers $\left(\frac{a-c}{b-d}\right)$.

2. On a $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, puis $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 = 49 + 20\sqrt{6}$ , donc $a_2 = 49$ et $b_2 = 20$. Si on admet que pour un certain $n$ quelconque $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n} = a_n + b_n\sqrt{6}$ , alors au rang suivant $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n+2} = \left(a_n + b_n\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n+2} = 5a_n + 12b_n + \left(2a_n + 5b_n\sqrt{6}\right)$. Cela suffit pour conclure par récurrence.
On peut faire le même type de raisonnement pour $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (et découvrir les vertus de la conjugaison). Dans le même temps, on peut remarquer que $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ est l'inverse de $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

3. L'addition terme à terme nous conduit à $2a_n = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n}$, et comme $0 < \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n} < 1$, on obtient le résultat demandé.

4. Ce qui précède nous montre que le chiffre des unités dans l'écriture décimale de l'irrationnel $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}$ est aussi le chiffre des unités de l'entier $2a_n - 1$. Écrivons les premières valeurs de $d_n$ :

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $2a_n$ | $d_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 5 | 2 | 10 | 9 |
| 2 | 49 | 20 | 98 | 7 |
| 3 | 485 | 198 | 970 | 9 |
| 4 | 4 801 | 1 960 | 9 602 | 1 |
| 5 | 47 525 | 19 402 | 95 050 | 9 |
| 6 | 470 449 | 192 060 | 940 898 | 7 |

On observe une répétition des chiffres des unités dans l'écriture de $a_n$ comme dans celle de $b_n$ – et aussi dans celle de $d_n$ , évidemment. On peut là encore procéder par récurrence pour montrer qu'à(1, 0) succède (5, 2) , puis (9, 0) puis (5, 8) puis (1, 0). On ne rédige pas ce raisonnement ici.
$2\,018 = 4 \times 504 + 2$. Il y a donc 504 successions complètes 1, 9, 7, 9, soit $504 \times 26 = 13\,104$ puis encore 1 et 9,
Au total 13 114.

**Exercice 5 Prenez les tangentes**

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{15}{x+1} + \frac{16}{x^2+1} - \frac{17}{x^3+1}$
Combien vaut $f(\tan 15°) + f(\tan 30°) + f(\tan 45°) + f(\tan 60°) + f(\tan 75°)$ ?

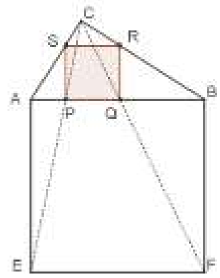
On remarque que $\tan 75° = \frac{1}{\tan 15°}$, que $\tan 60° = \frac{1}{\tan 30°}$ et que $\tan 45° = 1$. Cela donne l'idée d'exprimer

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{15}{x+1} + \frac{16}{x^2+1} - \frac{17}{x^3+1} + \frac{15x}{x+1} + \frac{16x^2}{x^2+1} - \frac{17x^3}{x^3+1} = 15 + 16 - 17 = 14$$

Il s'ensuit que le nombre cherché est 14 + 14 + 7 = 35

## *Thème : angles et distances, aires et volumes*

**Exercice 1 Un tiers d'hypoténuse, ou moins**

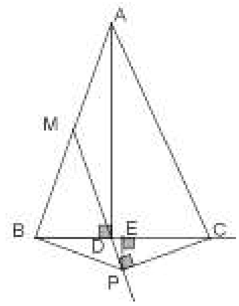



On donne un triangle ABC, rectangle en C. On construit le carré ABFE (les points E et F sont de l'autre côté de (AB) que C), puis les points P et Q, intersections respectives de (CE) et (CF) avec (AB). Les perpendiculaires à (AB) élevées en P et Q coupent respectivement (CB) en R et (CA) en S.

1. Montrer que PQRS est un carré. Le fait que le triangle ABC soit rectangle en C intervient-il dans cette preuve ? Le résultat (inscription d'un carré dans un triangle) est-il unique ?
2. Montrer que la longueur PQ est inférieure au tiers de la longueur AB.
3. Étudier le cas d'égalité dans ce qui précède.

1. Les triangles CSP et CAE d'une part, CPQ et CEF d'autre part, CQR et CFB enfin, sont en situation de Thalès et les rapports $\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{AE}}, \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CE}}, \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{EF}}, \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CF}}, \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BF}}$ peuvent être, dans cet ordre, démontrés égaux. D'où il ressort que SP = PQ = QR et le quadrilatère PQRS qui a trois côtés de même longueur et deux angles droits, est un carré. Ce résultat tient dans n'importe quel triangle. La construction faire « à l'envers » à partir d'un carré inscrit conduit au carré ABFE. L'unicité est prouvée.
2. Appelons $a, b$ et $c$, respectivement, les longueurs PQ, AP et QB. De la similitude des triangles SAP et SRQ vient : $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$
D'où $a^2 = bc$. Mais comme $\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 = b + c - 2\sqrt{bc}$ on en déduit que $b + c - 2a \geq 0$, d'où le résultat demandé.
3. L'égalité $b + c = 2a$ se traduit (voir ligne ci-dessus) par $b = c = a$. Les triangles ASP et BRQ sont isocèles. Le triangle ABC aussi.

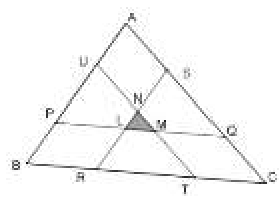
**Exercice 2 Un tiers itinérant**




Le point D est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Les mesures de [AB] et [BD] sont respectivement 3 et 1. Le point E est le milieu de [BC]. Le point P est l'intersection de la médiatrice de [BC] avec la droite (MD).
Le triangle DPC est rectangle en P.
Quelle est la mesure de [AC] ?

Le triangle MBD est isocèle de sommet principal M. L'angle en D du triangle EDP est donc égal à l'angle en B du triangle ABD. Les triangles rectangles ABD et PDE sont donc semblables (on peut aussi écrire des cosinus) et $\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{3}$. Mais le triangle CPD lui aussi a les mêmes angles aigus que les précédents, et donc : $\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DP}} = \frac{1}{3}$.
Donc $\mathrm{CD} = 3\mathrm{DP} = 9\mathrm{DE}$ et donc $\mathrm{CE} = 8\mathrm{DE}$ et $\mathrm{BD} = 7\mathrm{DE}$. Donc $\mathrm{DE} = \frac{1}{7}$ et $\mathrm{CD} = \frac{9}{7}$
Il n'y a plus qu'à appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADB, ce qui donne $\mathrm{AD}^2 = 8$, et dans le triangle ADC, qui donne $\mathrm{AC}^2 = 8 + \frac{81}{49} = \frac{473}{49}$. Donc $AC = \frac{\sqrt{473}}{7}$

**Exercice 3 Superposition de moitiés**



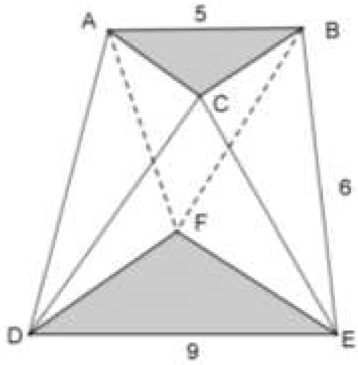
Les droites (PQ), (RS) et (TU) sont respectivement parallèles aux côtés [BC], [AB] et [AC] du triangle ABC. Chacune découpe le triangle ABC en deux parties d'aires égales.
On prend pour unité l'aire du triangle LMN défini par les points d'intersection de ces droites deux à deux.
Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Deux triangles dont un est un agrandissement de l'autre ont des aires dont le rapport est le carré du rapport d'agrandissement. Le triangle ABC est un agrandissement de chacun des triangles APQ, BTU et CSR dans le rapport $\sqrt{2}$. C'est aussi un agrandissement du triangle NLM dans un rapport *à trouver* dont le carré est l'aire cherchée.

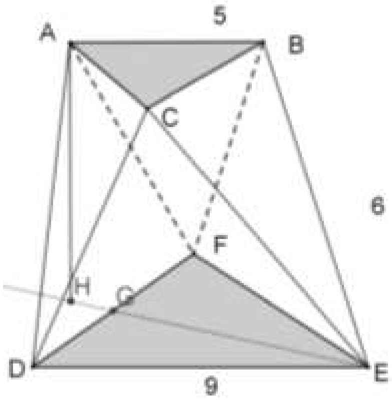
Le segment [PQ] a pour longueur $\frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{2}}$ . Le segment [PL] a la même longueur que le segment [BR], c'est-à-dire $\mathrm{BC}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. C'est aussi la longueur de [MQ]. Il s'ensuit que $\mathrm{LM}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\mathrm{BC}$. Le rapport d'agrandissement de [LM] à [BC] est donc $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{LM}}=\frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Son carré est $34+24\sqrt{2}$ (on retrouve environ 68 fois le petit triangle dans le grand).

**Exercice 4 Octaèdre**

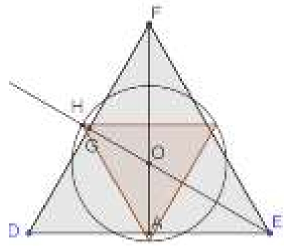
Dans l'octaèdre représenté ci-contre, deux faces sont des triangles équilatéraux, de côté 5 et 9 respectivement. Les autres arêtes ont toutes la même longueur, 6 (la figure est grossière).
On peut admettre que les faces grisées sont placées dans des plans parallèles et que la droite passant par le centre de gravité de ABC et celui de DEF est perpendiculaire aux plans de ces faces. Quelle est la distance de ces plans (la hauteur de l'octaèdre, si on veut l'appeler ainsi) ?




La perpendiculaire aux plans des bases passant par A coupe la hauteur issue de E du triangle DEF en H. Si on appelle G le milieu de [DF], le triangle AHG est rectangle en H, et AH est la hauteur cherchée. [GA] est la hauteur du triangle ADF, dont les côtés sont connus. Reste à déterminer HG.




On a représenté le centre de gravité O du triangle DEF, qui est aussi le projeté du centre de gravité du triangle ABC. Le segment [OH] a pour longueur les deux tiers de la hauteur du triangle équilatéral de côté 5, et le segment [OG] le tiers de la hauteur du triangle équilatéral de côté 9. Donc :




$\mathrm{OH}=\frac{2}{3}\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{\sqrt{3}}$ et $\mathrm{OG}=\frac{1}{3}\times 9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

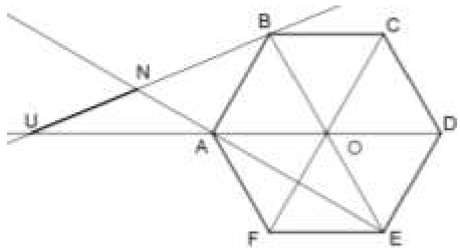
$$\mathrm{OH}-\mathrm{OG}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$\mathrm{AG}^2=\mathrm{AD}^2-\mathrm{DG}^2=36-\frac{81}{4}=\frac{63}{4}$ Donc $\mathrm{AH}^2=\frac{63}{4}-\frac{1}{12}=\frac{47}{3}$

Finalement $\mathrm{AH}=\sqrt{\frac{47}{3}}$.

**Exercice 5 Une (une seule) mesure à l'assaut des paradigmes. Constructions par neusis (νεύσις)**

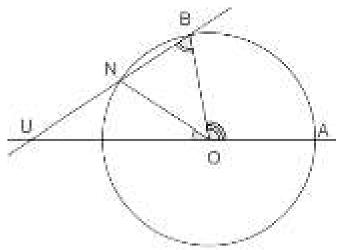
Les constructions « à la règle et au compas » constituent un paradigme institué par les géomètres grecs. Trois problèmes, la duplication du cube (construction de $\sqrt[3]{2}$), la trisection de l'angle et la quadrature du cercle résistaient à cet idéal. L'impossibilité de traiter les deux premiers à la règle et au compas relève du théorème de Pierre-Laurent Wantzel (1837); le troisième de l'impossibilité de trouver un polynôme à coefficients entiers dont π soit racine (Ferdinand von Lindemann 1882).




Voir le diaporama de l'exposé du stage préolympique 2013-2014 à l'adresse :
https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/clubs_compet/pepiniere.htm),

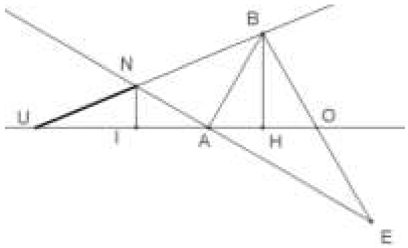
***1. Une construction de $\sqrt[3]{2}$***

Considérons un hexagone régulier ABCDEF de centre O et de côté 1. Une droite variable passant par B coupe la demi-droite [DA) en U et la demi-droite [EA) en N. On place cette droite de telle sorte que UN = 1. Alors BN = $\sqrt[3]{2}$.




***2. La trisection selon Archimède***

Il s'agit de trouver un angle de mesure le tiers de celle de $\widehat{\mathrm{AOB}}$ dans la figure ci-contre. Pour cela, on fait en sorte qu'une droite passant par B coupe la demi-droite [AO) en U et le cercle de centre O et de rayon 1 en N, point tel que UN = 1.




1. On peut réduire l'hexagone de départ (fourni dans le *Book of Numbers* de Conway et Guy) à la configuration du triangle équilatéral ABO de côté 1 complétée par le point E, symétrique de B par rapport à O et la droite « approchante » (UN) passant par B. Soit I le projeté orthogonal de N sur (AU) et H le milieu de [AO].
Le triangle BAE est rectangle en A (car BO = OA = OE). L'angle $\widehat{\mathrm{OAE}}$ a donc pour mesure 30°, l'angle $\widehat{\mathrm{NAU}}$aussi et le triangle NAI, rectangle avec un angle de 30°, est un demi triangle équilatéral. Si on désigne par $x$ la longueur inconnue de [NB], en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BNA, on trouve $\mathrm{NA} = \sqrt{x^2-1}$, et donc $NI = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$. Les deux triangles UNI et UBH étant en situation de Thalès, on obtient l'égalité des rapports : $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{x+1}$ . Après simplification, cette égalité s'écrit :$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$. La factorisation est facile, ici, on obtient $(x+2)(x^3-2) = 0$ (si on ne veut pas factoriser, on peut quand même voir que $\sqrt[3]{2}$est une solution ou faire tracer la courbe). Cette version de la preuve est évidemment moderne.
2. Le triangle ONU est isocèle de sommet principal N. L'angle $\widehat{\mathrm{BNO}}$ a donc pour mesure le double de la mesure de $\widehat{\mathrm{NUO}}$. Le supplémentaire de l'angle en O du triangle BNO a pour mesure le double de celle de $\widehat{\mathrm{BNO}}$, et donc le quadruple de la mesure de $\widehat{\mathrm{NUO}}$. Ce supplémentaire est composé des angles $\widehat{\mathrm{AOB}}$et $\widehat{\mathrm{NOU}}$, d'où le résultat.

## *Thème : probabilités, dénombrement*

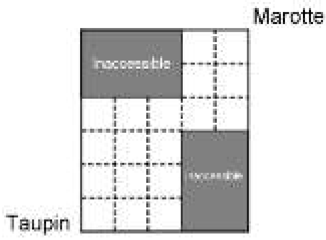
**Exercice 1 Principe des tiroirs ou principe du pigeonnier ?**
Montrer que pour tout polyèdre, il y a au moins deux sommets où aboutissent le même nombre d'arêtes.

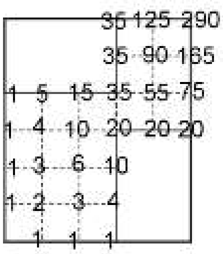
Supposons que le polyèdre ait $n$ sommets. À chaque sommet aboutissent au moins deux arêtes, et au plus $n-1$. On numérote les sommets de 1 à $n$ et à chacun de ces entiers on associe un entier compris entre 2 et $n-3$. Certains ne seront pas servis…
En français cela s'appelle le principe des tiroirs (si on veut mettre une chaussette au moins par tiroir, il faut avoir moins de chaussettes que de tiroirs), en anglais pigeonhole princip.

**Exercice 2 Sélection scolaire**
Les 26 étudiants d'une unité d'enseignement passent un examen comportant $n$ questions. Chaque réponse apporte 1 point ou 0. Il s'avère qu'aucune question n'a été convenablement résolue par plus de 3 étudiants. Combien y avait-il de questions, au minimum ?

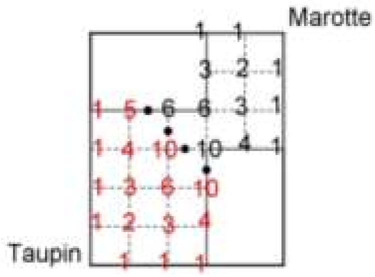
Le total des points acquis par l'ensemble des étudiants est, au minimum,
$$0+1+2+3+\cdots+25=\frac{25\times 26}{2}=325$$
Comme $325=108\times 3+1$, on en déduit qu'il y a eu au minimum 109 questions (difficiles, si on n'en juge que par les scores des étudiants).

**Exercice 3 Visitez Carréville**
Taupin et Marotte résident à quelques blocs l'un de l'autre (les blocs sont supposés carrés et de même côté). Ils partent chacun de chez soi au même moment, et marchent à la même vitesse, pensant aller elle chez lui, lui chez elle (il n'a plus de batterie). Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?



Commençons par dénombrer les chemins allant de chez Taupin à chez Marotte (ce sont les mêmes dans l'autre sens). Le nombre de chemins parvenant à une intersection est la somme du nombre de chemins parvenant à l'intersection située à gauche (sur la figure) et du nombre de chemins parvenant à l'intersection du dessous (sur la figure). On en trouve pour le parcours total 290. Taupin et Marotte, s'ils se retrouvent, le feront en un des points marqués en gras sur la figure de droite, situés chacun à mi-parcours pour les deux amis. Les 290 chemins possibles se partagent en : 5×6=30, 6×10=60, 10×10=100 et 10×10=100 passant par chacun des points marqués. La probabilité pour que chacun des deux emprunte la même rue est, respectivement, de $\left(\frac{30}{290}\right)^2, \left(\frac{60}{290}\right)^2, \left(\frac{100}{290}\right)^2, \left(\frac{100}{290}\right)^2$.




La somme de ces quatre est la probabilité de leur rencontre, $\frac{245}{841}$.

**Exercice 4 Course à la présidence**

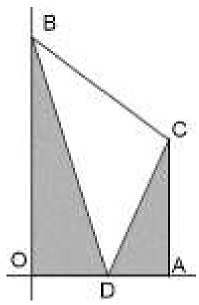
Deux candidates, Ada et Béate, sont candidates à la présidence d'un bureau. Il y a 8 votants (pas elles). Le vote est organisé ainsi : les huit votants se succèdent et après chaque vote on totalise les voix. Dès que le score d'une candidate dépasse celui de l'autre de 4, le scrutin est clos et la candidate de tête est proclamée élue. Si cela ne se produit pas, aucune des deux n'est élue. Quelles sont les probabilités des trois événements Ada élue, Béate élue, aucune élue ?

| Votant | Score | Proba | Score | Proba | Score | Proba | Score | Proba | Score | Proba | Observations |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 - 0 | 1 /2 | 0 - 1 | 1/2 | | | | | | | |
| **2** | 2 - 0 | 1/4 | 1 - 1 | 1/2 | 0 - 2 | 1/4 | | | | | |
| **3** | 3 - 0 | 1 /8 | 2 - 1 | 3/8 | 1 - 2 | 3/8 | 0 - 3 | 1/8 | | | |
| **4** | 4 - 0 | 1/16 | 3 - 1 | 1/4 | 2 - 2 | 3/8 | 1 – 3 | 1/4 | 0 - 4 | 1 /16 | Reste 7/8 |
| **5** | 4 - 1 | 1/8 | 3 - 2 | 5/16 | 2 – 3 | 5/16 | 1 - 4 | 1/8 | | | |
| **6** | 5 - 1 | 1/16 | 4 - 2 | 7/32 | 3 - 3 | 5/16 | 2 - 4 | 7/32 | 1 - 5 | 1/16 | Reste 3/4 |
| **7** | 5 - 2 | 7/64 | 4 - 3 | 17/64 | 3 - 4 | 17/64 | 2 - 5 | 7/64 | | | |
| **8** | 6 - 2 | 7/128 | 5 - 3 | 3/16 | 4 - 4 | 17/64 | 3 - 5 | 3/16 | 2 - 6 | 7/128 | Reste 51/64 |

La probabilité de l'élection de Ada (comme de celle de Béate) est 23/64.

**Exercice 5 Combien de bonnes réponses ?**

On demande à des étudiants de placer les points A, B, C et D dans le premier quadrant d'un repère orthonormal d'origine O, de sorte que A soit sur l'axe des abscisses, B sur l'axe des ordonnées, C ait même abscisse que A, D soit sur le segment [OA]. On demande que les longueurs OD, OA, AC, CB, BO soient entières (et non nulles), que le périmètre du quadrilatère OACB soit 32 et que la somme des aires des triangles BOD et DAC soit égale à l'aire du triangle BDC. Les étudiants fournissent toutes les réponses possibles, et deux quelconques n'ont pas donné la même réponse. Combien y a-t-il d'étudiants ?




La condition sur les aires signifie que la somme des deux aires des triangles rectangles est égale à la moitié de l'aire du trapèze. On a donc : $\frac{(\mathrm{OB}+\mathrm{AC})\times\mathrm{AO}}{4} = \frac{\mathrm{OB}\times\mathrm{OD}}{2} + \frac{\mathrm{DA}\times\mathrm{AC}}{2}$. Cette égalité peut s'écrire $\mathrm{OB}\times(2\mathrm{OD}-\mathrm{AO}) + \mathrm{AC}\times(2\mathrm{DA}-\mathrm{AO}) = 0$ ou encore $(\mathrm{OB}-\mathrm{AC})(\mathrm{OD}-\mathrm{DA}) = 0$. La discussion peut donc s'organiser :

- ou bien le trapèze OACB est un rectangle. On a $\mathrm{OA}+\mathrm{OB} = 16$, mais comme OD et OB sont des entiers, OA prend les valeurs entières de 2 à 15 et OD les valeurs entières inférieures à OA et non nulles. Cela en fait $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+10+12+13+14 = 105$
- ou bien le trapèze n'est pas un rectangle (évitons les redondances) et D est le milieu de [AO]. Comme BC est un entier, une condition nécessaire s'écrit : $\mathrm{OA}^2 + (\mathrm{OB}-\mathrm{AC})^2$est le carré d'un entier. On essaie donc les premiers triplets pythagoriciens, en tenant compte du fait que OA est un entier pair, attendu que OD est un entier :

OA = 4 donne OB – AC = 3 et BC = 5. On prendra AC = 10 et OB = 7
OA = 6 donne OB – AC = 8 ou −8 et BC = 10. On prendra AC = 4 et OB = 12 ou AC = 12 et OB = 4
OA = 8 donne OB – AC = 6 ou −6 et BC = 10. On prendra AC = 4 et OB = 12 ou AC = 12 et OB = 4
OA = 12 donne OB – AC = 5 ou −5 et BC = 13. On prendra AC = 1 et OB = 6 ou AC = 6 et OB = 1
Cela fait 8 possibilités supplémentaires.
Il y a 113 étudiants.

# *Thème : équations*

**Exercice 1 Le calcul littéral est utile**

Quelle est la plus petite valeur prise par la fonction $f:(x,y)\mapsto 4x^2+(x+2y-6)^2+16y-23$ ?

On peut développer pour obtenir, pour tout $(x,y)$ : $f(x,y)=5x^2+4y^2+4xy-12x-8y+13$

On commence à regrouper : $f(x,y)=(2y+x-2)^2+4x^2-8x+9$

On continue : $f(x,y)=(2y+x-2)^2+4(x-1)^2+5$

Il s'ensuit que le minimum est 5, atteint pour $x-1=0$ et $2y+x-2=0$, c'est-à-dire $(x,y)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

**Exercice 2 Le calcul littéral est utile**

On donne : $a^3-3ab^2=52$ et $b^3-3a^2b=47$

Combien vaut $a^2+b^2$ ?

Combien valent $a$ et $b$ ?

Observons que $(a^3-3ab^2)^2+(b^3-3a^2b)^2=(a^2+b^2)^3$

Cela permet de calculer : $(a^2+b^2)^3=2\,704+2\,209=4\,913=17^3$

Donc $a^2+b^2=17$

Repartons de $b^3-3a^2b=47$pour écrire $b^3-3(17-b^2)b=47$, soit $4b^3-51b-47=0$

Cette dernière condition s'écrit : $(b+1)(4b^2-4b-47)=0$

$-1,\frac{1+4\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-4\sqrt{3}}{2}$ sont les solutions en $b$.

Avec la condition $a^3-3a(17-a^2)=52$, on obtient $4a^3-51a-52=0$, qui se factorise en $(a-4)(4a^2+16a+13)=0$

$4,\frac{\sqrt{3}-4}{2},-\frac{\sqrt{3}+4}{2}$ sont les solutions en $a$. Il n'y a plus qu'à associer chaque solution en $a$ avec « sa » solution en $b$.

**Exercice 3 C'est le paramètre l'inconnue**

Pour quelles valeurs de l'entier $k$ l'équation $(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$ admet-elle deux solutions entières ?

En suivant l'inspiration, on écrit l'équation $k^2x^2-18kx-x^2+6x+72=0$, qui peut encore s'écrire : $(kx-9)^2-81-x^2+6x+72=0$ et finalement $(kx-9)^2-(x-3)^2=0$.

L'équation initiale est donc $\big((k+1)x-12\big)\big((k-1)x-6\big)=0$

Les valeurs de $k$ cherchées sont donc telles que $k+1$ soit diviseur de 12 et $k-1$ diviseur de 6. Il ne reste que 2, 3 et 5.

**Exercice 4 Hommage à François Viète (1540 – 1603)**

Les « formules de Viète » (c'est ainsi que les désigne la littérature mathématique anglo-saxonne) établissent les relations entre les racines d'une équation polynômiale et les coefficients de l'écriture canonique du polynôme. À l'époque de Viète, les seules racines à considérer étaient positives, et on ne savait établir ces relations que dans un sens (on connaît les racines, et on voit comment en dépendent les coefficients). Par exemple :

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\\&\quad=x^5-(a+b+c+d+e)x^4+(ab+bc+cd+de+ea+ac+ce+eb+bd+da)x^3\\&\quad-(abc+bcd+cde+eab+abd+bde+dea+eac+acd+cde)x^2+(abcd+bcde+cdea+deab+eabc)x-abcde\end{aligned}$$

Au niveau première, on ne connaît de telles relations que pour l'équation du second degré, mais avec elles on peut résoudre de jolis exercices, par exemple :

On pose, pour tout $x$ : $f(x)=x^4+x^3+bx^2+100x+d$ et $g(x)=x^3+ax^2+x+10$, où $a,b,c$ et $d$ sont des réels. On suppose que l'équation $g(x)=0$ a trois racines réelles distinctes, qui sont aussi des racines de l'équation $f(x)=0$. Combien vaut $f(1)$?

Appelons ces trois racines $u,v$ et $w$. Leur somme est égale à $-a$. Si on lui additionne la quatrième racine $t$ de l'équation $f(x)=0$, on obtient $t-a=-1$, d'où $t=a-1$. La somme des produits deux à deux de ces racines est 1 et leur produit est $-10$. La somme des produits trois à trois des racines de l'équation $f(x)=0$ s'écrit : $tuv+tvw+twu+uvw=-100$, mais elle s'écrit aussi $t(uv+vw+wu)+uvw=t-10$. On en déduit que $t=-90$.

D'où on déduit les coefficients (encore) inconnus :

$b=uv+vw+wu+t(u+v+w)=1-90\times 89=-8\,009$

Et $d=tuvw=-90\times -10=900$

Finalement : $f(1)=1+1-8\,009+100+900=-7\,007$

Autre rédaction (sans utiliser les formules de Viète) :

$f(x) = (x - t)g(x)$

donc $x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + d = (x - t)(x^3 + ax^2 + x + 10)$

$$= x^4 + (a - t)x^3 + (1 - at)x^2 + (10 - t)x - 10t$$

On trouve alors un peu plus directement :

$a - t = 1,\ 1 - at = b,\ 10 - t = 100$ et $-10t = d$

D'où $t = -90,\ d = 900,\ a = -89$ et $b = -8009$.

**Exercice 5 Deux inconnues pour une seule équation ?**

Résoudre $\frac{36}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{y}} = 42 - 9\sqrt{x} - \sqrt{y}$

Il faut encore faire un peu de calcul littéral. L'équation s'écrit : $\frac{36}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} = 42 - \sqrt{y} - \frac{9}{\sqrt{y}}$, ce qu'on essaie de transformer. $\frac{9}{\sqrt{x}}(4 + x) = \frac{-1}{\sqrt{y}}(9 + y - 42\sqrt{y})$. Puis viennent successivement :

$$\frac{9}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + \frac{9}{\sqrt{x}}4\sqrt{x} = \frac{-1}{\sqrt{y}}\left(3 - \sqrt{y}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{y}}36\sqrt{y}$$

Et $\frac{9}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\left(3 - \sqrt{y}\right)^2 = 0$

Cette dernière situation ne peut se produire que lorsque $x = 4$ et $y = 9$

# *Thème : programmation, codage, algorithme*

**Exercice 1 Réseau perturbé**

Un réseau d'ordinateurs comporte 32 unités, numérotées 00000, 00001, 00010, etc. 11101, 11111. On suppose qu'en marche normale, deux ordinateurs de ce réseau peuvent communiquer si leur numéro comporte quatre chiffres identiques dans les mêmes positions. On appellera *niveau* d'une machine le nombre de 1 que comporte son numéro. Voici le classement par niveau :

*Niveau 0* : 00000 ; *Niveau 1* : 00001, 00010, 00100, 01000, 10000

*Niveau 2* : 00011, 00101, 01001, 10001, 00110, 01010, 10010, 01100, 10100, 11000

*Niveau 3* : 00111, 01011, 10011, 01101, 10101, 11001, 01110, 10110, 11010, 11100

*Niveau 4* : 01111, 10111, 11011, 11101, 11110 ; *Niveau 5* : 11111

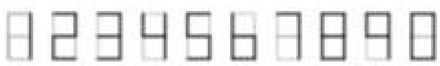
On suppose qu'à chacun des niveaux 1, 2, 3 et 4 trois ordinateurs sont incapables de recevoir ou transmettre un message. On souhaite transmettre une information de la machine 00000 à la machine 11111. Sera-ce possible ?

Réponse : Non. En effet :

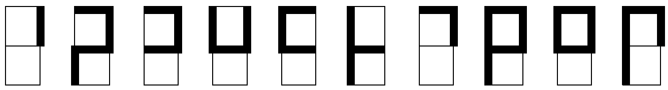
- la machine de niveau 0 communique avec les machines de niveau 1 ;
- les deux machines fonctionnant de niveau 1 communiquent avec 7 machines de niveau 2 ;
- il se peut que, parmi ces 7 machines, seules 4 fonctionnent ; celles-ci communiquent avec 6 machines de niveau 3 ;
- parmi ces 6 machines, il se pourrait que seules 3 fonctionnent ; celles-ci communiquent avec 3 machines de niveau 4 dont aucune ne pourrait fonctionner.

**Exercice 2 C'était avant les cristaux liquides**

7 diodes en forme de bâtonnets permettaient de figurer les chiffres de 0 à 9. Combien de ces bâtonnets peuvent-ils rester éteints sans que cela empêche l'utilisateur de distinguer les 10 chiffres sans ambiguïté ?



Réponse : Parmi les 7 bâtonnets, 2 peuvent rester éteints, les deux du coin de droite :



Remarques :

- tout d'abord il faut au moins 4 bâtonnets pour distinguer 10 chiffres ($2^3 < 10$).
- on ne peut pas ôter la barre horizontale du centre car elle différencie le « 8 » du « 0 », ni la barre horizontale supérieure qui différencie le « 7 » du « 1 » ;
- on ne peut pas retirer les deux barres verticales supérieures car elles différencient le « 3 » du « 5 » ni les deux barres verticales inférieures car elles différencient le « 2 » du « 3 », ni le coin inférieur gauche qui distinguent le « 8 » du « 9 » …
- si on pouvait en retirer 3 ce serait les deux verticales de droite et l'horizontale du bas ce qui ne distinguerait pas le « 5 » du « 9 ».

**Exercice 3 Baba**

Voici un langage n'utilisant que deux symboles, $a$ et $b$. Avec ces symboles, on forme des *mots* en respectant l'axiome « $a$ est un *mot* » et les règles suivantes :

- À partir d'un *mot* donné, on peut former un nouveau *mot* en ajoutant $b$ à son extrémité droite ;
- Si un *mot* fait apparaître la séquence $aaa$, cette séquence peur être remplacée par $b$ pour faire un nouveau *mot* ;
- Si un *mot* fait apparaître la séquence $bbb$, on peut la supprimer pour former un nouveau *mot* ;
- On peut « doubler » (écrire deux fois à la suite la séquence de symboles) un *mot* pour donner un nouveau *mot*.

$baabaabaa$ est-il un *mot* de ce langage ?

et les mots $baba$ ? $abba$ ? $baabbabaa$ ?

Réponses : Non, car il y a 6 "$a$" dans "$baabaabaa$" et le mot de départ n'en a qu'un. En effet :

- on partage l'ensemble des mots que l'on peut former en deux parties dont l'une contient seulement les mots possédant un nombre de "$a$" multiple de 3;
- chacune de ces parties est stable par chaque règle de formation d'un nouveau mot.

Oui : $a \to aa \to aaaa \to ba \to baba$

Oui : $a \to ab \to abb \to abbabb \to abbabbb \to abba$

Oui : $a \to aa \to aaaa \to aaaab \to bab \to babb \to babbbabb \to baabb \to baabbb \to baa \to baabaa \to baabaab \to baabaabb \to baabaabbbaabaabb \to baabaaaabaabb \to baabbabaabb \to baabbabaabbb \to baabbabaa$

**Exercice 4 Supergloutonne au travail**

Notre superhéroïne veille sur la ville. Elle parcourt la rocade (AB) d'où son regard part perpendiculairement à (AB) pour voir la ville. Les malfaisants du cru ont dressé à la va-vite des murs qui devraient l'empêcher de voir. Il y a des murs de longueur 4, 3, 2 et 1. Heureusement :

- Supergloutonne peut voir au travers d'un mur (pas plus d'un) ;

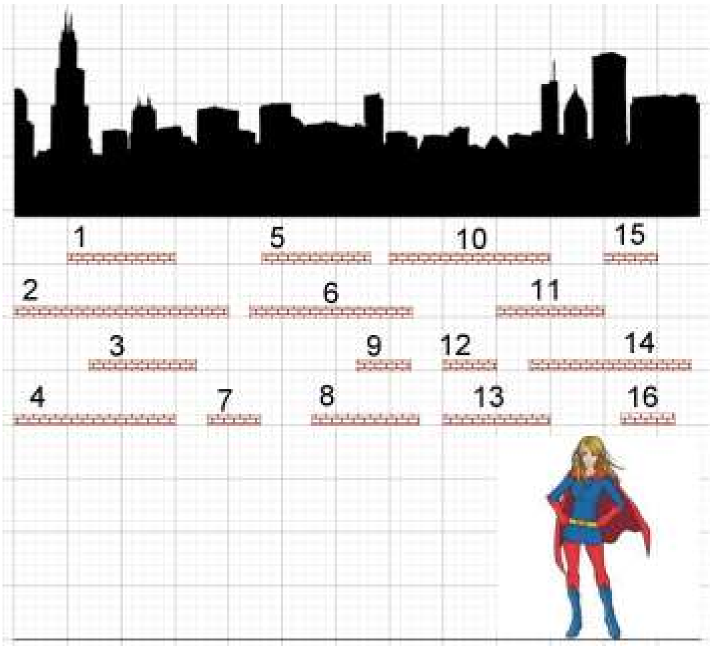
- Supergloutonne peut détruire des murs, mais cela lui coûte une partie de ses autres pouvoirs, aussi s'en tient-elle à des destructions minimales.

Combien de murs au minimum seront-ils détruits ? Lesquels seront conservés ?

Réponse : 8 murs seront détruits. En effet :

- En gardant les 7 murs n°4, 7, 5, 9, 12, 11 et 15 et en détruisant les autres, Supergloutonne peut veiller sur toute la ville, car ces murs ne se chevauchent pas.
- les murs n°1,2,3 et 4 se chevauchent, il faut donc détruire au moins 3 d'entre eux ; il faut également détruire au moins 3 des murs n°10, 6, 9 et 8 et 2 des murs n°11, 13 et 14.

Remarque : la méthode utilisée ici par Supergloutonne consiste à conserver le plus proche et le plus court mur qui ne chevauche pas le dernier mur conservé et à détruire tous les autres. C'est un algorithme glouton : il est optimal à chaque étape, mais pas forcément optimal pour résoudre le problème.




**Exercice 5 Séquençage**

La suite de lettres TAGC est écrite 55 fois consécutivement sur une bande de papier. On découpe cette bande en morceaux composés de une, deux, trois… lettres, qu'on appelle mots.

Combien de mots différents ce découpage peut-il faire apparaître, au maximum ?

Réponse : 40 mots. En effet :

- tout d'abord, un mot de longueur donné est déterminé par sa premère lettre ; il y en a donc au plus 4 ;
- soit $n$ le nombre de lettres du plus grand mot découpé ; il y a au plus $4(1+2+\cdots+n)$ lettres dans les mots découpés ;
- il y a $55 \times 4$ lettres dans la suite donc, $4(1+2+\cdots+n) \leq 55 \times 4$ soit $n \leq 10$ (calculatrice) ; soit au maximum 40 mots ;
- un découpage possible de 40 mots :
  T/AG/CTA/…/AGCTAGCTAG/C/TA/GCT/…/TAGCTAGCTA/G/CT/AGC/…/CTAGCTAGCT/A/GC/TAG/…/GCTAGCTAGC.