Olympiades par équipe

Éléments de solution

Exercice 1 Le bal des batraciens

Partie A

1. Exemples

a. Deux grenouilles et un crapaud

G_2	G_1		C
G_2		G_1	C
G_2	C	G_1	
G_2	C		G_1
	C	G_2	G_1
C		G_2	G_1

b. Deux grenouilles et deux crapauds

G_2	G_1		C_1	C_2
G_2		G_1	C_1	C_2
G_2	C_1	G_1		C_2
G_2	C_1	G_1	C_2	
G_2	C_1		C_2	G_1
	C_1	G_2	C_2	G_1
C_1		G_2	C_2	G_1
C_1	C_2	G_2		G_1
C_1	C_2		G_2	G_1

2. *a.* Sur une ligne de longueur $L = g + c + 1$, la grenouille x occupe la position $g + 1 - x$. Elle ne recule ni ne saute ses semblables avant d'atteindre la position $c + g + 1 + 1 - x$.
Elle a donc parcouru $c + g + 1 + 1 - x - (g + 1 - x) = c + 1$ cases.

b. Les grenouilles dans leur ensemble ont donc parcouru

$$L_g = g \times (c + 1)$$

La situation présente une symétrie, les crapauds ont parcouru

$$L_c = c \times (g + 1)$$

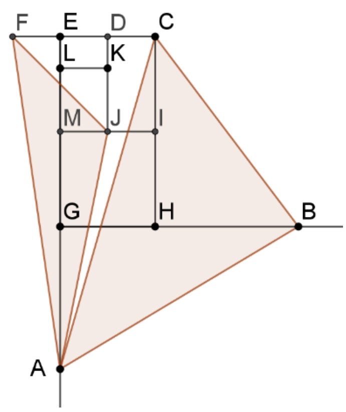
Et, au total, toutes ces bêtes ont parcouru $L = 2c \times g + c + g$.

3. Les sauts de longueur 2 servent à sauter un concurrent de l'autre espèce. Toutes les grenouilles sautent tous les crapauds qui sautent toutes les grenouilles. Cela fait $c \times g$ sauts de longueur 2.
4. La distance parcourue est la somme des sauts de longueur 1 et des sauts de longueur 2. Si on ne compte que les sauts, on obtient $c \times g + c + g$.

Partie B

1. Entre minuit et 6 heures s'écoulent $6 \times 3\,600 = 21\,600$ secondes.
Le nombre minimum de sauts est $S = g^2 + 2g$ (puisque $c = g$). Donc $(g + 1)^2 < 21\,601$
2. Le plus grand carré d'entier inférieur à 21 601 est $21\,316 = 146^2$
On en déduit qu'il y a au maximum 145 grenouilles et 145 crapauds, au total 290 animaux.

Exercice 2 Un peu d'aires



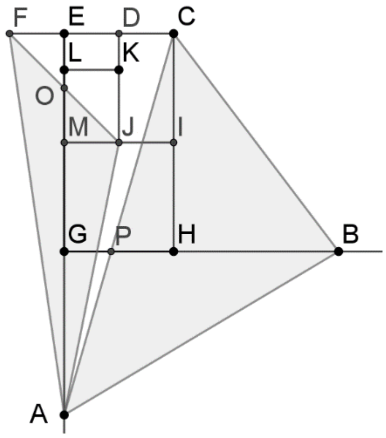
1. Posons $ED = x$.
L'énoncé fournit $EC = 2x$ et $CH = 4x$.
Comme M est le milieu de $[EG]$, il s'ensuit que $ME = 2x$ et comme L est situé au tiers du segment $[EM]$ en partant de E, $LE = \frac{2x}{3}$.
La donnée sur l'aire permet d'écrire $\frac{2x}{3} \times x = 24$ et donc $x = 6$.
Et donc $CE = 12$.

2. Appelons O le point d'intersection de $[JF]$ et $[EM]$. Les triangles JOM et FOE sont rectangles, les angles $\widehat{MJO}$ et $\widehat{OFE}$ sont en position alternes/internes pour les droites parallèles (MJ) et (FE) et la sécante (FJ), les segments $[MJ]$ et $[FE]$ ont même longueur. Ces triangles sont donc égaux. Ils ont même aire et on peut dire que dans l'égalité

$$Aire\ (FJA) = Aire\ (FOA) + Aire(OMJ) + Aire\ (JMA)$$

On peut remplacer OMJ par FEO pour écrire

$$Aire\ (FJA) = Aire\ (FEA) + Aire\ (JMA)$$



Pour le triangle FEA, les mesures sont $FE = 6$ et $EA = EG + GA$

Donc $Aire\ (FOA) = \frac{1}{2} 6 \times (24 + 18) = 126$

Pour le triangle JAM, les mesures snt $MA = MG + GA = 30$ et $JM = 6$

Donc $Aire(JAM) = \frac{1}{2} 6 \times 30 = 90$

L'airez du triangle FJA est donc 216

3. Appelons P le point d'ntersection des droites (GH) et (CA). Les triangles CPH et APG sont semblables et comme $\frac{GA}{CH} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, le rapport des aires

$$\frac{Aire(GAP)}{Aire\ (HCP)} = \frac{9}{16}$$

Comme précédemment, on décompose l'aire du triangle ABC :

$$Aore\ (ABC) = Aire\ (BCH) + Aire\ (CPH) + Aire\ (AGB) - Aire\ (AGP)$$

$$Aire\ (BCH) = \frac{1}{2} 18 \times 24 = 216$$

$$Aire\ (AGB) = \frac{1}{2} 18 \times 30 = 270$$

$$Aire\ (CPH) = \frac{1}{2} 24 \times \left(\frac{4}{7} \times 12\right) = \frac{576}{7}$$

Comme dit précédemment, $Aire\ (AGP) = \frac{9}{16} \times Aire(CPH) = \frac{324}{7}$

Finalement

$Aire\ (ABC) = 216 + 270 + \frac{576-324}{7} = 522.$

Exercice 3 Nombres à quatre chiffres

1. Si un des chiffres est nul, leur produit vaut 0, inférieur ou égal à tout entier naturel.

2. L'ordre des chiffres n'intervient ni dans le calcul de leur somme, ni dans le calcul de leur produit. La somme des quatre chiffres est la somme de quatre nombres inférieurs ou égaux à 9. Elle est donc inférieure à 36.

3. Traitement de la condition nécessaire $a + b + c + d \leq 36$

Si le plus grand chiffre est	Le produit des trois autres est	Les possibilités sont
9	≤ 4	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,2,2)$
8	≤ 4	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,2,2)$
7	≤ 5	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5), (1,2,2)$
6	≤ 6	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5), (1,1,6),$ $(1,2,2), (1,2,3)$
5	≤ 7	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5),$ $(1,2,2), (1,2,3)$
4	≤ 9	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4),,$ $(1,2,2), (1,2,3), (1,2,4), (1,3,3)$
3	*Ici, on peut se limiter à un inventaire*	$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,2,3), (2,2,2), (2,2,3)$
2		$(1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,2,2)$
1		$(1,1,1)$

Chaque quadruplet obéissant à la condition nécessaire fait apparaître le chiffre 1.

4. On retient ceux des triplets de la colonne de droite du tableau précédent qui vérifient la condition proposée initialement pour former les nombres solutions tels que $a \leq b \leq c \leq d$. Ces nombres sont :

1 119	1 118	1 117	1 116	1 115	1 114	1 113	1 112	1 111
1 122	1 123	1 124						

5. En permutant les chiffres des nombres du tableau précédent, on fait apparaître toutes les solutions :

1 119	1 118	1 117	1 116	1 115	1 114	1 113	1 112	1 111
1 191	1 181	1 171	1 161	1 151	1 141	1 131	1 121	1 124
1 911	1 811	1 711	1 611	1 511	1 411	1 311	1 211	1 214
9 111	8 111	7 111	6 111	5 111	4 111	3 111	2 111	1 412
1 122	2 112	1 123	1 132	2 113	3 112	1 142	2 114	4 121
1 212	2 121	1 213	1 231	2 131	3 121	1 241	2 141	4 211
1 221	2 211	1 321	1 312	2 311	3 211	1 421	2 411	4 112

Il y en a 63.