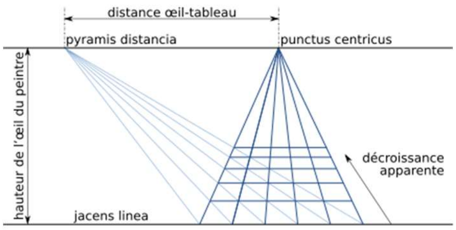
Versailles

Lycée Marie Curie

« RENAISSANCE MAN »

L'expression « Renaissance man » désigne un « homme de la Renaissance », c'est-à-dire un homme (la notion est datée, elle ne mentionne pas de femme…) capable de s'intéresser à quantité de sujets, domaines de connaissance ou arts, avec finesse et succès. L'article de l'Encyclopaedia Britannica donne comme premier exemple et modèle Leon Battista Alberti.



Perspective, méthode d'Alberti

Il nait en 1404 à Gênes et meurt en 1472 à Rome. Ses ouvrages : *de Pictura, de Statua, de Re Aedificatoria* font autorité dans leurs domaines, et sa compagnie est recherchée dès qu'il s'agit d'élever le niveau intellectuel de la conversation. Il conçoit un système de codification des mesures du corps humain, son activité d'architecte est à la fois théorique et pratique, il réalise des avancées significatives en cryptographie. Il utilise les mathématiques pour les représentations en perspective, s'opposant, dans la situation du carrelage, à ceux qui multipliaient la hauteur par 2/3 pour passer d'une ligne à la suivante. Une légende (reprise dans le film *Renaissance man*) veut qu'il ait été capable de sauter pieds joints par-dessus un homme debout devant lui…

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de seconde
Désigné(es) par leurs établissements les 14 et 15 avril 2025

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d'Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles, le lycée Charles de Gaulle de Poissy. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Nicolas RAMBEAUD, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF.

Les intervenants professeurs : Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHENIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Rémi NIGUES (Collège Auguste Renoir, ASNIERES SUR SEINE)

Professeur accompagnant : Antonino FAMULARO (lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE)

Emploi du temps

Lundi 14 avril 2025

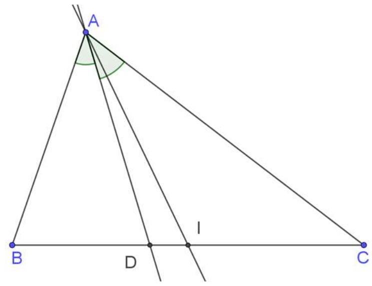
	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers
10 heures	Accueil		
10 h 10	Géométrie RN	Arithmétique, nombres CD	Dénombrement, probabilités MA
12 h 10	Repas		
13 heures	Dénombrement, probabilités MA	Géométrie RN	Arithmétique, nombres CD
15 h 10	Exposé + Film		

Mardi 15 avril 2025

	Groupe 1 Vers	Groupe 2 Vers	Groupe 3 Vers
10 heures	Calcul littéral, équations SM	Dénombrement, Probabilités MA	Géométrie PM
12 heures	Repas		
12 h 50	Arithmétique, nombres CD	Calcul littéral, équations SM	Calcul littéral, équations PM
15 heures	Quiz		

Géométrie

Quelques définitions



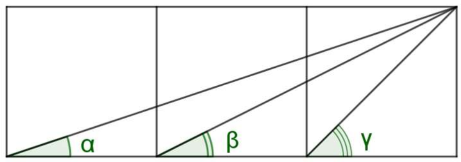
Définition 1 : dans un triangle ABC, on appelle médiane issue du point A la droite passant par A et par le milieu I du segment [BC]

Définition 2 : on appelle bissectrice d'un angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ une droite qui coupe l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ en deux angles adjacents $\widehat{\mathrm{BAD}}$ et $\widehat{\mathrm{DAC}}$de même mesure.

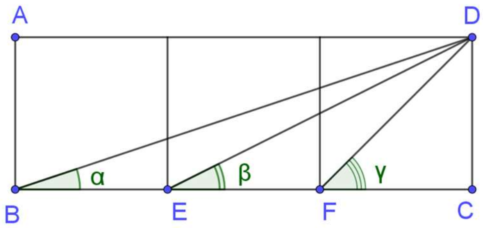
Exercice 1

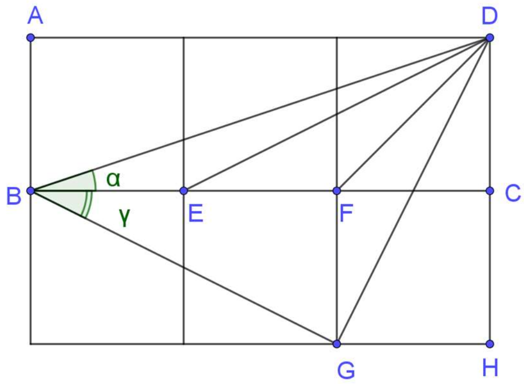
La figure ci-contre est constituée des trois carrés de même dimension et accolés.
Déterminer la valeur en degrés de la somme des mesures d'angles :

$$\alpha + \beta + \gamma$$



Sans nuire à la généralité du problème, on peut supposer que les trois carrés ont des cotés de longueur 1.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BCD rectangle en C, on a donc :
$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 = 9 + 1 = 10$ d'où $\mathrm{BD} = \sqrt{10}$.
De même, en se plaçant dans le triangle ECD, $\mathrm{ED} = \sqrt{5}$
De plus $\widehat{\mathrm{CFD}} = 45°$ car $[\mathrm{FD}]$ est la diagonale d'un carré.
Si on se place dans la figure ci-contre, par symétrie, les triangles rectangles $\mathrm{ECD}, \mathrm{GHD}$ et BFG sont isométriques et en particulier
$\mathrm{ED} = \mathrm{BG} = \mathrm{GD} = \sqrt{5}$.
On en déduit : $\mathrm{BG}^2 + \mathrm{GD}^2 = 5 + 5 = 10 = \mathrm{BD}^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle BGD est rectangle en G. Le triangle BGD est de plus isocèle en G.
D'où $\widehat{\mathrm{BGD}} = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$ et $\widehat{\mathrm{DBG}} = \alpha + \gamma$.
Au final $\alpha + \beta + \gamma = 45° + 45° = 90°$

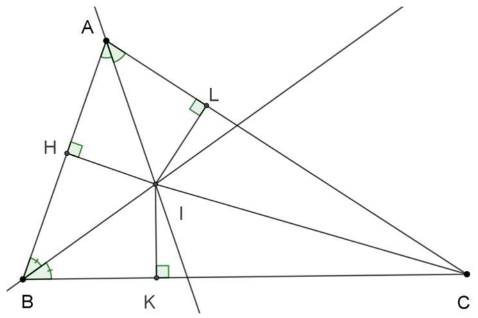




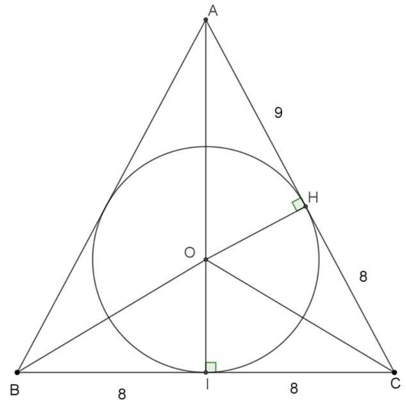
Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes et que leur point d'intersection est le centre d'un cercle inscrit dans le triangle.

1. Soit ABC un triangle. On note I le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{BAC}}$ et $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et H, K, L les projetés orthogonaux de I respectivement sur (AB), (BC) et (CA).
   Montrer que IH = IK = IL et en déduire que (IC) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$.
2. Application : on considère un triangle ABC isocèle en A et tel que AB = AC = 17 et BC = 16.
   Déterminer le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

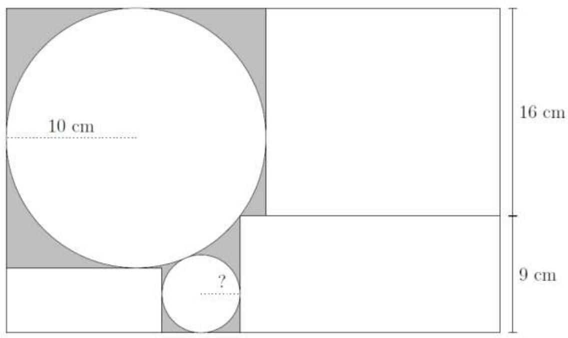


1. Les triangles BKI et BHI sont rectangles respectivement en K et en H. De plus, (BI) étant la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, les angles $\widehat{IBK}$ et $\widehat{HBI}$ ont même mesure. Ces deux triangles ont le côté [BI] en commun. On en déduit qu'ils sont isométriques et que IK = IH.
On démontre de même que les triangles AHI et ALI sont isométriques et que IH = IL.
On a donc bien IH = IK = IL et le cercle de centre I passant par H passe aussi par K et L et, en chacun de ces points, le rayon est perpendiculaire à un côté du triangle.
I est donc bien le centre du cercle inscrit dans le triangle.
Les deux triangles CKI et CLI sont donc rectangles respectivement en K et L avec le côté [CI] commun et IK = IL.
Le théorème de Pythagore permet d'en déduire que CK = CL. Ces deux triangles sont donc isométriques.
La droite (IC) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{KCL}$.

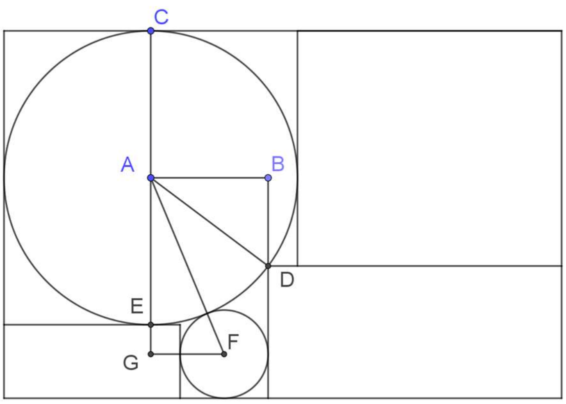


2. Le triangle ABC étant isocèle en A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est la médiatrice du segment [BC]. Elle coupe donc ce segment en I tel que IC = 8.
Par le même raisonnement qu'au a. et en notant H le projeté orthogonal de O sur [AC], on peut démontrer que les triangles OIC et OHC sont isométriques et donc que CH = 8. D'où AH = 17 – CH = 9.
Si on note r le rayon du cercle inscrit et x la distance OA, on obtient en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles AOH rectangle en H et AIC rectangle en I :
$r^2 + 9^2 = x^2$ et $(x + r)^2 + 8^2 = 17^2$.
La seconde équation s'écrit : $(x + r)^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2$ soit $x + r = 15$
Puisque les nombres considérés sont des distances donc positifs.
La première équation s'écrit alors : $(15 - r)^2 = r^2 + 81$ soit en développant et en réduisant, $30r = 144$, soit $\boldsymbol{r = \frac{24}{5}}$.

Exercice 3



La figure ci-contre représente une boîte à bento (pour contenir un repas complet) de forme rectangulaire.
Le grand contenant circulaire, dont le rayon mesure 10 cm, touche en exactement un point chacun des quatre autres contenants et les deux bordures de la boîte.
Sachant que le petit contenant circulaire touche également la bordure et les trois contenants qui lui sont adjacents, déterminer la mesure r de son rayon.



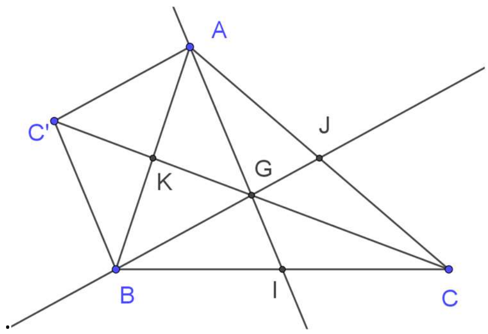
On trace dans la figure ci-contre les triangles ABD et AGF rectangles respectivement en B et en G.
D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABD :
$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD}^2 - \mathrm{BD}^2$. Or $\mathrm{AD} = 10$ (rayon du grand cercle)
et $\mathrm{BD} = 16 - \mathrm{AC} = 6$. On en déduit que $\mathrm{AB} = 8$.
Dans le triangle AGF, on a :
$\mathrm{AF} = 10 + r$ car les deux cercles sont tangents
$\mathrm{GF} = \mathrm{AB} - r = 8 - r$ et $\mathrm{AG} = (16 + 9) - \mathrm{AC} - r = 15 - r$.
D'après le théorème de Pythagore, r vérifie donc l'équation
$(10 + r)^2 = (15 - r)^2 + (8 - r)^2$
Soit $r^2 + 20r + 100 = r^2 - 30r + 225 + r^2 - 16r + 64$

Soit $r^2 - 66r + 189 = 0$.

Or $r^2 - 66r + 189 = r^2 - 2 \times 33 \times r + 33^2 + 189 - 33^2 = (r-33)^2 - 900$
Soit $r^2 - 66r + 189 = (r-33)^2 - 30^2 = (r - 33 - 30)(r - 33 + 30) = (r-63)(r-3)$.
L'équation $r^2 - 66r + 189 = 0$ s'écrit donc $(r-63)(r-3) = 0$ et a pour solution 3 et 63.
Seule la solution $r = 3$ est possible dans le contexte du problème posé.

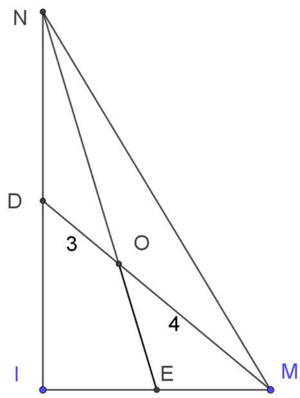
Exercice 4 – Médianes concourantes

1. Soit ABC un triangle. On note I le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$, J le milieu du segment $[\mathrm{CA}]$. Soit G le point d'intersection des deux médianes (AI) et (BJ) et soit K le point d'intersection des droites (CG) et (AB).
   - **a.** Soit C' le symétrique du point C par rapport au point G. Montrer que le quadrilatère AC'BG est un parallélogramme.
   - **b.** En déduire que les médianes du triangle ABC sont concourantes en G et exprimer $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$.
2. Calculer l'aire d'un triangle NMI, rectangle en I sachant que, si D et E désignent les milieux respectifs des segments $[\mathrm{MI}]$ et $[\mathrm{NI}]$, les droites (MD) et (NE) se coupent en un point O de telle sorte que $\mathrm{OD} = 3$ et $\mathrm{OE} = 4$.



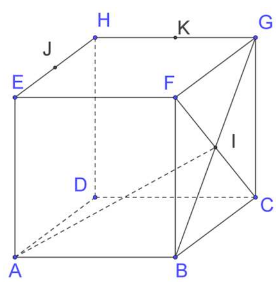
1. **a.** Dans le triangle $\mathrm{C'BC}$, I et G sont les milieux respectifs des segments $[\mathrm{BC}]$ et $[\mathrm{C'C}]$ dont les droites (IG) et $(\mathrm{BC'})$ sont parallèles, ce qui signifie que les droites (AG) et $(\mathrm{BC'})$ sont parallèles.
De même, dans le triangle C'AC, J et G sont les milieux respectifs des segments $[\mathrm{CA}]$ et $[\mathrm{C'C}]$ dont les droites (JG) et $(\mathrm{CA'})$ sont parallèles, ce qui signifie que les droites (BG) et $(\mathrm{CA'})$ sont parallèles.
On en déduit que le quadrilatère $\mathrm{AC'BG}$.

b. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc le point K est le milieu de la diagonale $[AB]$ du parallélogramme $\mathrm{AC'BG}$.
Cela signifie que la droite (CG) est la médiane issue de C dans le triangle ABC et que les trois médianes du triangle sont concourantes en G.
De plus G étant le milieu de $[\mathrm{CC'}]$ et K celui de $[\mathrm{C'G}]$, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \overrightarrow{\mathrm{CG}} + \overrightarrow{\mathrm{GK}} = \overrightarrow{\mathrm{CG}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC'}} = \overrightarrow{\mathrm{CG}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CG}}$
Soit $\overrightarrow{\mathrm{CG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CK}}$.
Remarque : On a de même $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$.



2. L'aire du triangle NMI rectangle en I est égale à $\mathcal{A} = \mathrm{IE} \times \mathrm{IN}$.
D'après la question précédente, le point de concours des médianes se situe aux deux tiers de celles-ci en partant du sommet. On en déduit que $\mathrm{ON} = 2\mathrm{OE} = 8$ d'où $\mathrm{EN} = 12$ et dans le triangle NIE rectangle en I, $\mathrm{NI}^2 + \mathrm{IE}^2 = 12^2 = 144$.
On démontre de même et en se plaçant dans le triangle MID rectangle en I, que $\mathrm{OM} = 2\mathrm{OD} = 6$ d'où $\mathrm{DN} = 9$ et donc $\mathrm{DI}^2 + \mathrm{IM}^2 = 9^2 = 81$ ce qui s'écrit aussi $\frac{1}{4}\mathrm{NI}^2 + 4\mathrm{IE}^2 = 81$.
Posons $x = \mathrm{NI}^2$ et $y = \mathrm{IE}^2$. Le couple (x, y) est solution du système $\begin{cases} x + y = 144 \\ x + 16y = 324 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + y = 144 \\ 15y = 180 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + y = 144 \\ y = 12 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 132 \\ y = 12 \end{cases}$
On en déduit que $\mathrm{NI} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$ et $\mathrm{IE} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
D'où $\mathcal{A} = \mathrm{IE} \times \mathrm{IN} = 2\sqrt{33} \times 2\sqrt{3} = 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{11} = 4 \times 3 \times \sqrt{11} = 8\sqrt{11}$.

Exercice 5



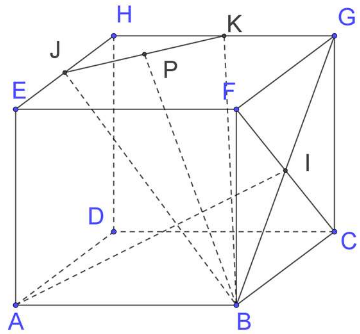
Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube dont les arêtes ont pour longueur $2x$, x étant un réel strictement positif.
Le point I est le centre de la face BCGF. Les points J et K sont les milieux respectifs des segments $[\mathrm{HE}]$ et $[\mathrm{HG}]$

1. On suppose dans cette question que $x = 2$.
   Calculer la distance AI.

2. On ne connait pas la valeur de x dans cette question mais on sait que si P est le pied de la hauteur dans le triangle LBK, alors $\mathrm{BP} = 17$.
Calculer le volume du cube ABCDEFGH.

1. Comme ABCDEFGH est un cube, le quadrilatère BCGF est un carré et le triangle BCG est rectangle isocèle en B.
D'après le théorème de Pythagore, on a donc $\mathrm{BG}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CG}^2 = 4 + 4 = 8$.
Comme le point I est le centre de la face BCGF, il est le milieu de [BG] donc $\mathrm{BI} = \frac{1}{2}\mathrm{BG} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$
De plus, la droite (AB) est perpendiculaire aux droites (BC) et (BF) donc au plan (BC) et donc à la droite (BG) qui est incluse dans ce plan. Le triangle ABI est donc rectangle en B d'où, d'après le théorème de Pythagore :
$\mathrm{AI}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BI}^2 = 4 + 2 = 6$ et donc $\mathrm{AI} = \sqrt{6}$.

2. Par définition des points J et K, $\mathrm{HJ} = \mathrm{HK} = x$ et, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HJK, rectangle en H, $\mathrm{JK}^2 = \mathrm{JH}^2 + \mathrm{HK}^2 = 2x^2$.



Donc $\mathrm{JK} = x\sqrt{2}$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle EAB, rectangle en A,
$\mathrm{EB}^2 = \mathrm{EA}^2 + \mathrm{AB}^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2$.
La droite (EH) est perpendiculaire aux droites (EA) et (EF) donc au plan (EAF) et en particulier à la droite (EB) incluse dans ce plan.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle EJB, rectangle en E,
$\mathrm{JB}^2 = \mathrm{JE}^2 + \mathrm{EB}^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + (2x)^2 = 9x^2$.
On démontrerait de même que $\mathrm{KB}^2 = 9x^2$.
Dans le triangle JBK isocèle en B, la hauteur (BP) est aussi médiatrice et dans le triangle BPJ rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore $\mathrm{JB}^2 = \mathrm{JP}^2 + \mathrm{PB}^2$ soit $9x^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 17^2$ soit $9x^2 - \frac{1}{2}x^2 = 17^2$ soit $\frac{17}{2}x^2 = 17^2$ c'est-à-dire $x^2 = 34$. On a donc $x = \sqrt{34}$ donc $2x = 2\sqrt{34}$ et le volume du cube est $\mathcal{V} = \left(2\sqrt{34}\right)^3 = 8 \times 34\sqrt{34} = 272\sqrt{34}$.

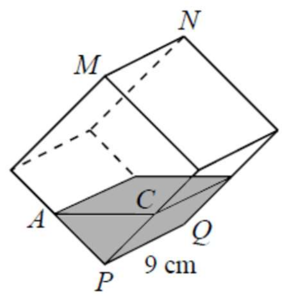
Exercice 6

Un cube dont les arêtes ont pour longueur 9 cm contient une certaine quantité d'eau. Lorsque ce cube repose sur une de ses faces la hauteur de l'eau est égale à 1 cm.

1. Calculer le volume de l'eau dans le cube.
2. On déplace le cube en le faisant reposer uniquement sur une de ses arêtes notée $[PQ]$, l'arête opposée se trouvant directement au-dessus de l'arête $[PQ]$. Déterminer la profondeur de l'eau dans le cube.

1. Le volume d'eau dans le cube est le volume d'un prisme de base carrée et de hauteur 1cm
Soit, en cm³ , $\mathcal{V} = 1 \times 9 \times 9 = 81$.

2. Pour arriver à la position donnée, on fait subir au cube une rotation de 45° autour de la droite (PQ) et l'eau prend la forme d'un prisme à base triangulaire comme dans la figure ci-contre.



La base du prisme est un triangle rectangle (à chaque sommet les arêtes forment un angle droit) et isocèle (car $[MN]$ est directement au-dessus de $[PQ]$ et donc $PC = PC$, la surface de l'eau devant être horizontale).
Si on note D le milieu de $[AC]$, le triangle ADP est donc rectangle et isocèle en D d'où la hauteur h d'eau est $h = DP = AD$.
D'autre part, le volume d'eau dans le cube est celui d'un prisme de base triangulaire.
Cette base a pour aire l'aire de APC, soit $\mathcal{A} = \frac{1}{2}AC \times DP = \frac{1}{2} \times 2h \times h = h^2$.
Donc $81 = \mathcal{V} = \mathcal{A} \times 9$ d'où $h^2 = \frac{81}{9} = 9$ et donc $h = 3$

Arithmétique – Nombres

Exercice 1

Trouver un entier naturel N de quatre chiffres qui est le carré d'un entier naturel, dont les deux premiers chiffres sont égaux et donc les deux derniers chiffres sont égaux.

L'entier N s'écrire $\overline{aabb}$ c'est-à-dire $N = 1\,000a + 100a + 10b = b$ où $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$.
On a donc $N = 1\,100a + 11b = 11(100a + b)$ d'où N est un multiple de 11.
De plus N est le carré d'un entier naturel n. Comme 11 est un nombre premier, cet entier n doit donc être aussi multiple de 11. Il existe donc un entier m tel que $N = 121m^2$.
Comme N est un nombre à quatre chiffres, $1\,000 \leq N \leq 9\,999$ d'où $\frac{1\,000}{121} \leq m^2 \leq \frac{9\,999}{121}$ soit $9 \leq m^2 \leq 82$
d'où $3 \leq m \leq 9$. En testant les valeurs 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, on constate que la seule valeur qui convient est $m = 8$ et alors $N = 121 \times 64 = 7\,744$.

Exercice 2

Déterminer pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $N = 3^n - 2n - 1$ est un multiple de 4.

Pour $n = 0$ et pour $n = 1, N = 0$ qui est un multiple de 4. Pour $n = 2, N = 4$ qui est un multiple de 4.
Pour $n = 3, N = 20$ qui est un multiple de 4. Pour $n = 4, N = 72$ qui est un multiple de 4.
On a donc l'idée de démontrer que N est un multiple de 4 pour tout entier n. On distingue pour cela deux cas :
SI n est un entier pair, alors il existe un entier m tel que $n = 2m$
Et $N = 3^{2m} - 2 \times 2m - 1 = (3^m)^2 - 1 - 4m = (3^m - 1)(3^m + 1) - 4m$
Or les deux entiers $(3^m - 1)$ et $(3^m + 1)$ sont pairs (sommes de deux entiers impairs). Leur produit est dinc un multiple de 4. Comme $4m$ est aussi un multiple de 4, N est lui-même un multiple de 4.
De même, si n est un entier impair, alors il existe un entier m tel que $n = 2m + 1$
Et $N = 3^{2m+1} - 2 \times (2m + 1) - 1 = 3^{2m+1} - 3 - 4m = 3(3^{2m} - 1) - 4m$.
L'entier $(3^{2m} - 1)$ est, d'après ce qui précède un multiple de 4 ainsi donc que $3(3^{2m} - 1)$ et par, somme N est un multiple de 4.
On a donc bien pour entier n, N est un multiple de 4.

Exercice 3

Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $15p + 7pq + qr = pqr$.

$15p + 7pq + qr = pqr$ s'écrit $qr = pqr - 15p - 7pq$ soit $qr = p(qr - 15 - 7q)$.
On en déduit que qr est un multiple de p.
Comme p, q, r sont des nombres premiers, cela signifie que $p = q$ ou $p = r$.
Si $p = q$, alors $qr - 15 - 7q = r$ soit $qr - 7q - r = 15$ c'est-à-dire $q(r - 7) - (r - 7) = 15 + 7$
soit $(q - 1)(r - 7) = 22$. Or les seuls diviseurs stricts de 22 sont 1, 2 et 11.
Donc $q - 1 = 1$ et $r - 7 = 22$ ou $q - 1 = 2$ et $r - 7 = 11$ ou $q - 1 = 11$ et $r - 7 = 2$ ou $q - 1 = 22$ et $r - 7 = 1$.
Comme q et r sont des nombres premiers, la seule possibilité est $q = 2$ et $r = 29$.
Si $p = r$, alors $qr - 15 - 7q = q$ soit $qr - 8q = 15$ c'est-à-dire $q(r - 8) = 15$
Or les seuls diviseurs stricts de 15 sont 1, 3 et 5.
Donc $q = 1$ et $r - 8 = 15$ ou $q = 3$ et $r - 8 = 15$ ou $q = 5$ et $r - 8 = 3$ ou $q = 15$ et $r - 8 = 1$.
Comme q et r sont des nombres premiers, les seules possibilités sont $q = 3$ et $r = 23$, $q = 5$ et $r = 11$.
(On rappelle que 1 n'est pas un nombre premier).
Au final les triplets solutions sont $(2,2,29)$, $(3,23,3)$, $(11,5,11)$.

Exercice 4

Si N est un entier naturel compris entre 1 000 000 et 10 000 000, quelle est la valeur maximale possible de la somme des chiffres de $25 \times N$?

Puisque N est un entier naturel compris entre 1 000 000 et 10 000 000, alors $25 \times N$ est un entier naturel compris entre 25 000 000 et 250 000 000. Donc, $25 \times N$ a soit 8 chiffres, soit 9 chiffres. On peut regrouper les deux cas en supposant que $25 \times N$ a 9 chiffres, le premier (à gauche) pouvant être 0.
Puisque $25 \times N$ est un multiple de 25, ses deux derniers chiffres sont 00, 25, 50 ou 75. On note x, y, z les trois premiers chiffres de $25 \times N$. Le nombre $25 \times N$ ayant la plus grande somme des chiffres est xyz 999 975.
On cherche donc à maximiser la somme $x + y + z$ sachant que $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 9$ et $0 \leq z \leq 9$
D'où $x + y + z \leq 20$.
En fait $x + y + z = 20$ est impossible car alors $25 \times N = 299\,999\,975$ qui n'est pas dans l'intervalle donné.
En revanche, on peut avoir $x + y + z = 19$ en prenant $x = 1, y = z = 9$ (ce n'est pas la seule solution), ce qui correspond à$25 \times N = 199\,999\,975$ qui est bien dans l'intervalle donné.
La somme maximale cherchée est donc $1 + 9 \times 6 + 7 + 5 = 67$

Exercice 5

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $20n + 2$ divise $2\,025n + 208$.

Si $20n + 2$ divise $2\,025n + 208$, alors $20n + 2$ divise $20(2\,025n + 208) - 2\,025(20n + 2)$
soit $20n + 2$ divise $4\,160 - 4\,050 = 110$. Or $110 < 6 \times 20 + 2$ donc $n < 6$.
De plus, comme $20n + 2$ est pair, $2\,025n + 208$ est pair et donc puisque 208 est pair alors que 2 025 est impair, n est pair. Donc n ne peut valoir que 0, 2, 4 ou 6.
Si $n = 0$, alors $20n + 2 = 2$ et $2\,025n + 208 = 208$. C'est bien une solution.
Si $n = 2$, alors $20n + 2 = 42$ et $2\,025n + 208 = 4\,258$ qui n'est pas un multiple de 42.
Si $n = 4$, alors $20n + 2 = 82$ et $2\,025n + 208 = 8\,3088$ qui n'est pas un multiple de 82.
Si $n = 6$, alors $20n + 2 = 122$ et $2\,025n + 208 = 16\,408$ qui n'est pas un multiple de 122.
La seule solution est donc 0.

Exercice 6

Démontrer que pour tout nombre entier naturel p premier tel que $p > 3$, il existe un entier naturel n tel que $p = \sqrt{24n + 1}$.

Les nombres p et $24n + 1$ étant des nombres positifs, l'égalité $p = \sqrt{24n + 1}$ équivaut à $p^2 = 24n + 1$ c'est-à-dire $p^2 - 1 = 24n$. Le problème revient donc à montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 24.
Or $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.
Comme p est un nombre premier tel que $p > 3$, p est en fait supérieur ou égal à 5 et impair.
Les deux entiers $p - 1$ et $p + 1$ sont donc pairs, supérieurs strictement à 4 et de plus, entiers pairs consécutifs. L'un d'entre eux est donc un multiple de 4.
On en déduit que $p^2 - 1$ est un multiple de 8.
De plus les entiers $p - 1, p, p + 1$ sont trois entiers consécutifs. L'un d'eux est donc un multiple de 3 et cela ne peut pas être p puisque p est un nombre premier tel que $p > 3$. Donc l'un des nombres $p - 1, p + 1$ est un multipke de 3 et donc $p^2 - 1$ est un multiple de est un multiple de 3.
Comme 3 et 8 n'ont aucun diviseur commun, on en déduit que $3 \times 8 = 24$ est un diviseur de $p^2 - 1$ et qu'il existe bien un entier n tel que $p^2 - 1 = 24n$.

Calcul littéral – Équations – Inéquations

Exercice 1

Soit x, y, z trois nombres réels non nuls tels que $3x+2y=z$ et $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$.

Déterminer la valeur du nombre réel $5x^2-4y^2-z^2$.

En multipliant les deux membres de l'équation $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ par xyz, on obtient l'équation $3yz+xz=2xy$

Soit $2xy-3yz-xz=0$.

D'autre part en multipliant les deux membres de l'équation successivement par x, y et z, on obtient les équations $3x^2+2xy=xz, 3xy+2y^2=yz, 3xz+2yz=z^2$.

On en déduit $5x^2-4y^2-z^2=\frac{5}{3}(-2xy+xz)-2(-3xy+yz)-(3xz+2yz)$

Soit $5x^2-4y^2-z^2=\frac{1}{3}(-10xy+5xz-6(-3xy+yz)-9xz-6yz)$

Soit $5x^2-4y^2-z^2=\frac{1}{3}(-10xy+5xz+18xy-6yz-9xz-6yz)$

Soit $5x^2-4y^2-z^2=\frac{1}{3}(8xy-4xz-12yz)=\frac{4}{3}(2xy-xz-3yz)=0$

<u>Autre solution proposée par une élève ayant participé au stage</u> :

En « injectant » l'égalité $3x+2y=z$ dans l'expression à, calculer, on obtient :

$$5x^2-4y^2-z^2=5x^2-4y^2-(3x+2y)^2=-4x^2-8y^2-12xy=-4(x^2+2y^2+3xy)$$

De plus, toujours en « injectant » l'égalité $3x+2y=z$, l'équation $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ s'écrit $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3x+2y}$ soit $\frac{3y+x}{xy}=\frac{2}{3x+2y}$

c'est-à-dire $(3y+x)(3x+2y)=2xy$ soit $9xy+3x^2+6y^2=2xy-2xy=0$ soit $x^2+2y^2+3xy=0$.

On en déduit donc que $5x^2-4y^2-z^2=0$.

Exercice 2

1. Montrer que pour tous nombres réels a et b tels que $0<a\leq b$, $a\leq\sqrt{ab}\leq b$.

2. Soit P_1 et P_2 les deux nombres définis par :

$$P_1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2\,023}{2\,024} \text{ et } P_2=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2\,024}{2\,025}.$$

Montrer que $P_1<\frac{1}{45}<P_2$.

1. Comme $a, \sqrt{ab}, b$ sont des nombres positifs, les comparer revient à comparer leurs carrés.

Or $\left(\sqrt{ab}\right)^2-a^2=ab-a^2=a(b-a)$ qui est un nombre positif ou nul puisque $0<a\leq b$

Et $b^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=b^2-ab=b(b-a)$ qui est de même un nombre positif ou nul.

On a donc bien $a\leq\sqrt{ab}\leq b$.

2. On remarque que $P_1\times P_2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2\,023}{2\,024}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2\,024}{2\,025}$

Soit $P_1\times P_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2\,023}{2\,024}\times\frac{2\,024}{2\,025}=\frac{1}{2\,025}=\left(\frac{1}{45}\right)^2$.

De plus, si a est un réel strictement positif, $\frac{a+1}{a+2}-\frac{a}{a+1}=\frac{(a+1)^2-a(a+2)}{(a+2)(a+1)}=\frac{2a}{(a+2)(a+1)}$ qui est un nombre strictement positif. On en déduit que $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6},<\frac{6}{7},\ldots,\frac{2\,023}{2\,024}<\frac{2\,024}{2\,025}$ et don $0<P_1<P_2$.

D'après la question **1.**, $P_1<\sqrt{P_1\times P_2}<P_2$ soit $P_1<\frac{1}{45}<P_2$

Exercice 3

Montrer que le nombre $S=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2\,024}+\sqrt{2\,025}}$ est un nombre rationnel dont on donnera une expression plus simple.

Pour tout entier naturel non nul, $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
$S = (\sqrt{1}-\sqrt{0}) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2\,024}-\sqrt{2\,023}) + (\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,024})$
Soit $S = \sqrt{2\,0251} = 45$.

Exercice 4
Soit a, b, c trois nombres réels deux à deux distincts tels que $a+b+c=0$ et $a^2-b=b^2-c=c^2-a$
Déterminer la valeur de la somme $ab+bc+ca$.

Les égalités $a^2-b=b^2-c=c^2-a$ s'écrivent aussi $\begin{cases} a^2-b^2=b-c \\ b^2-c^2=c-a \\ c^2-a^2=a-b \end{cases}$.
En les multipliant membre à membre, on obtient :
$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = (b-c)(c-a)(a-b)$
Soit $(a-b)(a+b)(b-c)(b+c)(c-a)(c+a) = (b-c)(c-a)(a-b)$
Or les trois nombres a, b, c sont deux à deux distincts, on a donc $(a+b)(b+c)(c+a)=1$.
Comme $a+b+c=0$, cela s'écrit $-cab=1$ soit $abc=-1$.
Or, d'une part, $a(a^2-b)+b(b^2-c)+c(c^2-a) = a^3+b^3+c^3-ab-bc-ca$
D'autre part, $a(a^2-b)+b(b^2-c)+c(c^2-a) = a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = ab-ac+bc-ba+ca-ab=0$.
Donc $ab+bc+ca = a^3+b^3+c^3$
Or, comme, $a+b+c=0$, $a^3=(-b-c)^3 = -(b+c)^3 = -(b^3+c^3+3b^2c+3bc^2)$
Soit $a^3+b^3+c^3 = 3bc(b+c) = 3bc(-a) = -3abc$
Donc $ab+bc+ca=3$.

Exercice 5
Soit a, b, c trois entiers relatifs tels que $a+b+c=1$ et $ab+bc+ca<abc$.
Montrer que $ab+bc+ca<2abc$ (*)

On remarque que, comme $(a-1)(b-1)(c-1) = abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1$
Soit $(a-1)(b-1)(c-1) = abc-(ab+bc+ca)$, l'inégalité $ab+bc+ca<abc$ équivaut à l'inégalité $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ et l'inégalité (*) équivaut à $(a-1)(b-1)(c-1)+abc>0$.

- Si $a>1$, l'inégalité $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ se traduit par $(b-1)(c-1)>0$ c'est-à-dire $b>1$ et $c>1$ ou $b<1$ et $c<1$.

Dans le premier cas, l'inégalité (*) est vérifiée car $abc>0$. Dans le deuxième cas, si b et c sont de même signe ou si l'un d'entre eux au moins est nul, alors $abc \geq 0$ et l'inégalité (*) est encore vérifiée. Si b et c sont non nuls et de signe contraire, celui qui est positif doit donc être strictement compris entre 0 et 1, ce qui est impossible pour un entier.
Donc si $a>1$, l'inégalité (*) est vérifiée.

- Sinon, comme $(a-1)(b-1)(c-1)>0$, a ne peut être égal à 1 et on a $a<1$. Mais, en raisonnant de même avec $b>1$ ou $c>1$, on démontre que l'inégalité (*) est encore vérifiée.

Exercice 6
Soit x, y, z trois nombres réels tels que $\begin{cases} xy+2xz+4yz=42 \\ 2xy+5xz-yz=16 \\ 3xy-xz+2yz=18 \end{cases}$.
Déterminer toutes les valeurs possibles du produit xyz.

L'idée de base est de changer de variable pour se ramener à un système linéaire.

On pose alors $a = xy, b = xz, c = yz$ et on se ramène à résoudre le système $\begin{cases} a + 2b + 4c = 42 \\ 2a + 5b - c = 16 \\ 3a - b + 2c = 18 \end{cases}$ qui équivaut à

$\begin{cases} a + 2b + 4(2a + 5b - 16) = 42 \\ c = 2a + 5b - 16 \\ 3a - b + 2(2a + 5b - 16) = 18 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 9a + 22b = 106 \\ c = 2a + 5b - 16 \\ 7a + 9b = 50 \end{cases}$

soit, en multipliant les deux membres de la première équation par 7 et ceux de la troisième équation par 9

$\begin{cases} 63a + 154b = 742 \\ c = 2a + 5b - 16 \\ 63a + 81b = 450 \end{cases}$ soit, en retranchant les membres de de la troisième équation à ceux de la première et en revenant à la la troisième équation initiale $\begin{cases} 73b = 292 \\ c = 2a + 5b - 16 \\ 7a + 9b = 50 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 4 \\ c = 2a + 5b - 16 \\ 7a = 50 - 36 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 4 \\ c = 8 \\ a = 2 \end{cases}$.

Or $abc = (xyz)^2$. On en déduit que $(xyz)^2 = 2 \times 4 \times 8 = 8^2$.

Il y a donc deux valeurs possibles pour le produit xyz : les valeurs 8 et -8

Dénombrement et probabilités

Exercice 1

Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de quatre chiffres deux à deux distincts et pairs qui soient de plus multiples de 9 ?

Soit N un tel entier. N est un multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
Les quatre chiffres de N sont pairs donc appartiennent à $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Comme $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$, la seule façon d'avoir quatre chiffres deux à deux distincts pris dans $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ est de ne pas prendre 2 et d'écrire l'entier N uniquement avec les chiffres 0, 4, 6 et 8.
Pour le chiffre des milliers, seuls 4, 6 et 8 peuvent être choisis. Il reste alors 3 possibilités pour le chiffre des centaines puis 2 pour le chiffre des dizaines et une seule pour le chiffre des unités.
Au total, on a donc $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ nombres possibles.

Exercice 2

Jade fabrique des bracelets en utilisant cinq perles, qui peuvent être de trois couleurs différentes : rouges, vertes et bleues.
Elle peut utiliser la même couleur plusieurs fois et ne pas utiliser certaines couleurs si elle le souhaite.
Combien de bracelets **différents** Jade peut-elle fabriquer, si on considère que deux bracelets identiques à une rotation près comptent comme le même bracelet ?

On peut former un bracelet en alignant les cinq perles le long d'une corde, de gauche à droite, puis en attachant les deux extrémités ensemble. Pour chaque perle, Jade a trois choix possibles de couleur. Le nombre de façons d'agencer ainsi cinq perles sur une corde est donc 3^5. Mais certains de ces agencements mènent au même bracelet (à rotation près).
Plus précisément, chaque bracelet est représenté par exactement cinq agencements (qui dépendent de l'endroit où se trouve le nœud) à trois exceptions près : les trois bracelets unicolores.
Si x est le nombre de bracelets différents (à rotation près), on a donc : $5(x - 3) + 3 = 3^5$
Soit $5x = 243 - 3 + 15$ c'est-à-dire $x = 51$.

Exercice 3

Déterminer le nombre de rectangles possibles différents mesurant 12 centimètres sur 15 centimètres dans une grille rectangulaire de 50 centimètres sur 60 centimètres, formée de petits carrés égaux d'un centimètre de côté. Le périmètre des rectangles obtenus doit coïncider avec les droites tracées et ceux-ci peuvent empiéter sur d'autres rectangles. Deux rectangles tracés sont donc différents si au moins un petit carré n'appartient pas aux deux.

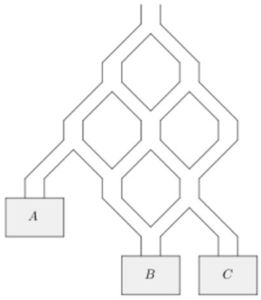
Soit une grille dont la largeur mesure 50 cm et la longueur mesure 60 cm.
On trace des rectangles de 12 cm de largeur et de 15 cm de longueur dans la partie supérieure de la grille ayant 12 cm de largeur. Le premier est à l'angle en haut et à gauche de la grille, le deuxième est son translaté de 1cm horizontalement, le troisième son translaté de 2cm, …, le dernier est à 15cm du coin en haut et à droite de la grille. On obtient ainsi 46 rectangles.
On trace de même des rectangles, translatés les uns des autres verticalement, de 12 cm de largeur et de 15 cm de longueur dans la partie de gauche ayant 15 cm de longueur. On obtient ainsi 39 rectangles.
Pour couvrir ainsi la grille, on utilise $46 \times 39 = 1\,794$ rectangles.
En effectuant le même travail mais avec des rectangles de 12 cm de longueur et de 15 cm de largeur, on obtient 49 rectangles dans la partie supérieure ayant une largeur de 15 cm et 36 dans la partie gauche ayant une longueur de 12 cm.
Pour couvrir ainsi la grille, on utilise $49 \times 36 = 1\,764$ rectangles.

Le nombre total de rectangles est de 1 794 + 1 764 = 3 558

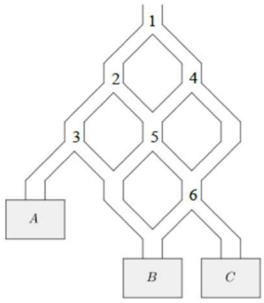
Exercice 4

Dans la figure ci-contre, un réseau de chemins relie une ouverture à trois bacs, soit les bacs A, B et C. Si on lâche une balle dans l'ouverture, la balle suivra l'un des chemins et finira par tomber dans l'un des bacs.
À chaque bifurcation, la balle a autant de chances de suivre l'un ou l'autre chemin.
Hélène lâche deux balles dans l'ouverture, l'une après l'autre.

Quelle est la probabilité pour que les deux balles tombent dans des bacs différents ?



Il y a au total 6 bifurcations qu'on numérote de 1 à 6 comme sur la figure ci-contre.
Comme à chaque bifurcation, la balle a autant de chance de suivre l'un ou l'autre chemin, la probabilité de suivre l'un des chemins est $\frac{1}{2}$.
La probabilité d'atteindre le bac A est donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Il y a ensuite trois chemins menant au bac A : le chemin 1-4-6, le chemin 1-4-5-6 et le chemin 1-2-5-6 (la balle ne peut que descendre).
La probabilité d'atteindre le bac C est donc :
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$



De même, les chemins menant au bac B sont : le chemin 1-4-5-6, le chemin 1-4-6, le chemin 1-4-5, le chemin 1-2-5-6, le chemin 1-2-5 et 1-2-3 et la probabilité d'atteindre le bac B est :
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$
Remarque : on peut aussi calculer cette probabilité en considérant qu'atteindre le bac B est le contraire de atteindre les bacs A ou C mais cela ne permet pas de vérifier que la somme des probabilités calculées est bien égale à 1.
La probabilité pour que les deux balles tombent dans des bacs différents est égale à 1 moins la probabilité que les deux balles tombent dans le même bac.
La probabilité que les deux balles tombent dans le bac A est $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.
La probabilité que les deux balles tombent dans le bac C est $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.
La probabilité que les deux balles tombent dans le bac B est $\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$.
La probabilité que les deux balles tombent dans des bacs différents est donc $p = 1 - \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{25}{64}\right) = 1 - \frac{30}{64}$ soit $p = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$.

Exercice 5

Chacune des lettres a, b, c correspond à l'un des nombres $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8$.
Combien existe-t-il de triplets (a, b, c) tels que $a \leq b \leq c$ et les nombres $\frac{ab}{c}, \frac{bc}{a}$ et $\frac{ca}{b}$ sont des entiers ?

Comme chacune des lettres a, b, c correspond à l'un des nombres $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8$, il existe trois entiers p, q, r compris entre 1 et 8 tels que $a = 3^p, b = q^3, c = 3^r$. De plus comme $a \leq b \leq c$, on a $p \leq \ q \leq \ r$.
$\frac{ab}{c} = 3^{p+q-r}, \frac{bc}{a} = 3^{q+r-p}, \frac{ca}{b} = 3^{r+p-q}$.
Ces trois nombres sont des entiers si et seulement si $p + q - r \geq 0, q + r - p \geq 0$ et $r + p - q \geq 0$.
Comme $p \leq \ q \leq \ r$ et $r + p - q = p + (r - q), r + p - q \geq p > 0$ donc $\frac{ca}{b}$ est toujours un entier.
De même, $q + r - p = q + (r - p)$ donc $q + r - p \geq q > 0$ donc $\frac{bc}{a}$ est toujours un entier.
Le problème revient à chercher le nombre de triplets (p, q, r) d'entiers compris entre 1 et 8 tels que $p \leq \ q \leq \ r$ et $p + q - r \geq 0$.

- Si $p = 1$, alors on cherche q et r tels que $1 \leq \ q \leq r \leq 8$ et $r \leq q + 1$. Si $q = 1$, r peut valoir 1 ou 2, si $q = 2$, r peut valoir 2 ou 3, …, si $q = 7$, r peut valoir 7 ou 8 et si $q = 8$, r peut valoir seulement 8.

Dans ce cas, on a $2 \times 7 + 1 = 15$ triplets possibles.

- Si $p = 2$, alors on cherche q et r tels que $2 \leq\ q \leq r \leq 8$ et $r \leq q + 2$.
  Si $2 \leq q \leq 6$, r peut valoir q ou $q + 1$ ou $q + 2$. Si $q = 7$, r peut valoir 7 ou 8. Si $q = 8$, r peut valoir seulement 8.
  Dans ce cas, on a $3 \times 5 + 2 + 1 = 18$ triplets possibles.
- Si $p = 3$, alors on cherche q et r tels que $3 \leq\ q \leq r \leq 8$ et $r \leq q + 3$.
  Si $3 \leq q \leq 5$, r peut valoir q ou $q + 1$ ou $q + 2$ ou $q + 3$. Si q prend les valeurs 6, 7, 8, r peut prendre respectivement 3, 2 ou 1.
  Dans ce cas, on a $4 \times 3 + 3 + 2 + 1 = 18$ triplets possibles.
- Si $p = 4$, alors on cherche q et r tels que $4 \leq\ q \leq r \leq 8$ et $r \leq q + 4$.
  On ne peut avoir que $q = 4$ et r peut valoir q ou $q + 1$ ou $q + 2$ ou $q + 3$ ou $q + 4$. Si q prend les valeurs 5, 6, 7, 8, r peut prendre respectivement 4, 3, 2 ou 1.
  Dans ce cas, on a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ triplets possibles.
- De même, pour $p = 5$, on a $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ triplets possibles.
  Pour $p = 6$, on a $3 + 2 + 1 = 6$ triplets possibles.
  Pour $p = 7$, on a $42 + 1 = 3$ triplets possibles.
  Pour $p = 8$, on 1seul triplet possible.

Le nombre total de triplets (a, b, c) est donc $15 + 18 + 18 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 86$.

Exercice 6

On place sept boules noires numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, et 7 dans un sac. On retire les boules du sac une par une et au hasard. Lorsqu'une boule est retirée du sac, elle n'est ni remplacée par une autre boule, ni remise dans le sac.

1. Quelle est la probabilité pour que la première boule retirée soit un nombre pair ?

2. Déterminer la probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 6.

3. On ajoute une huitième boule au sac. Cette huitième boule est dorée et porte l'entier k ($1 \leq k \leq 7$). La probabilité pour que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées soit supérieure ou égale à 7 est égale à $\frac{3}{4}$. Déterminer la valeur de k.

Le tirage au hasard assure l'équiprobabilité des résultats d'un tirage.

1. Parmi les sept boules dans le sas, trois ont un numéro pair. La probabilité que la première boule retirée porte un numéro pair est donc égale à $\frac{3}{7}$.

2. Comme aucune boule retirée n'est remplacée ou remise dans le sac, il y a 6 possibilités pour le numéro de la deuxième boule retirée. Cela fait au total $7 \times 6 = 42$ façons de retirer les deux premières boules.
« La somme supérieure ou égale à 6 » signifie « la somme égale à 5, 6, …, 13 », ce qui donne de nombreux cas à considérer. Le contraire de cet événement est « la somme inférieure ou égale à 5 » c'est-à-dire « la somme vaut 3, 4 ou 5 ».
On note S la somme des numéros des deux premières retirées. $S = 5$ de quatre façons :
$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$.
La probabilité pour que $S = 5$ est donc égale à $\frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.
De même, $S = 4$ de deux façons : $4 = 1 + 3 = 3 + 1$ et $S = 3$ de deux façons : $3 = 1 + 2 = 2 + 1$.
Le nombre de façon d'avoir $S \leq 5$ est donc $4 + 2 + 2 = 8$.
La probabilité pour que $S \geq 6$ est donc égale à $1 - \frac{8}{42} = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$.

3. « $S \leq 6$ » est l'événement contraire de « $S \geq 7$ ». Donc sa probabilité vaut $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Avec maintenant 8 boules dans le sac, il y a $8 \times 7 = 56$ façons de retirer les deux premières boules du sac.
Comme $\frac{1}{4} = \frac{14}{56}$, il doit y avoir 14 façons d'avoir une somme inférieure ou égale à 6.
Sans la boule dorée ajoutée, les façons sont déjà :
$1 + 5, 5 + 1, 2 + 4, 4 + 2, 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2, 1 + 3, 3 + 1, 1 + 2, 2 + 1$ ce qui donne 12 façons.

La boule dorée numérotée k doit donc fournir **exactement** deux façons nouvelles façons d'obtenir une somme au plus égale à 6.
Pour k valant 1, 2, 3, ou 4, on vérifie facilement qu'il y a plus de deux façons d'obtenir une somme au plus égale à 6 avec la boule dorée et une des boules numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.
Pour k valant 6 ou 7, il est impossible d'obtenir une somme au plus égale à 6 avec la boule dorée.
Pour $k = 5$, on peut obtenir une somme au plus égale à 6 avec la boule dorée en la retirant du sac en plus de la boule numérotée 1, ce qui donne deux façons $5 + 1$ ou $1 + 5$. Tous les autres tirages donnent une somme supérieure strictement à 6.
$k = 5$ est donc la seule valeur pour laquelle que la somme des numéros sur les deux premières boules retirées est supérieure ou égale à 7 est égale à $\frac{3}{4}$.