Proposition de corrigé 1 (d'un élève).
On suppose qu'il existe un couple solution $n\,;\, m \in \mathbb{N}^*$ où m et n sont les plus petits possibles tel que $x_n = y_m$
Ainsi, pour tout $k, p \in \mathbb{N}$, $k < n$ et $p < m$, on a $x_k \neq y_p$.
De plus

$$\begin{aligned} x_n = y_m &\iff x_{n-1}^2 + x_{n-1} = y_{m-1}^2 + y_{m-1} \\ &\iff x_{n-1}^2 - y_{m-1}^2 = -(x_{n-1} - y_{m-1}) \\ &\iff (x_{n-1} - y_{m-1})(x_{n-1} + y_{m-1}) = -(x_{n-1} - y_{m-1}) \\ &\iff x_{n-1} + y_{n-1} = -1 \end{aligned}$$

Pour tout $l, q \in \mathbb{N}$,

$$x_{l+1} - x_l = x_l^2 \qquad et \qquad y_{q+1} - y_q = y_q^2$$

Or $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ on déduit alors que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes et à termes positives.
Ainsi $x_{n-1} + y_{n-1} > 0$.
On déduit donc qu'il n'existe pas d'entiers m et n vérifiant $x_n = y_m$

Une autre proposition (de François Regus)

- Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + x^2$.
  Cette fonction étant somme de fonctions strictement croissantes, elle est donc strictement croissante sur son ensemble de définition.
  Ainsi elle est donc injective (et surjective puisque c'est une fonction), et donc bijective. Soit alors f^{-1} la fonction réciproque associée.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$x_{n+1} = f(x_n) \qquad et \qquad y_{n+1} = f(y_n)$$

  On déduit alors $x_n = f^n(x_0)$ et $y_m = f^m(y_0)$. Puisque $x_0 < y_0$ alors si il y a égalité on a $n > m$

  $$\begin{aligned} x_n = y_m &\iff f^n(x_0) = f^m(y_0) \\ &\iff (f^{-m} \circ f^n)(x_0) = (f^{-m} \circ f^m)(y_0) \\ &\iff y_0 = f^{n-m}(x_0) \end{aligned}$$

  Or $f(x_0) \approx 0,111$, $f^2(x_0) \approx 0,1221$ et $f^3(x_0) \approx 0,137$.
  Donc il n'existe pas d'entier k tel que $f^k(x_0) = y_0$.
  Donc le problème n'a pas de solution.