Fiche 2 Exercices Olympiades

Exercice 2. 1 Bataille d'exposants

Relation (1)

$2^{200} \times 2^{203} + 2^{163} \times 2^{241} + 2^{126} \times 2^{277} = 2^{403} + 2^{404} + 2^{403} = 2^{403}(1+2+1)$

$= 2^{403} \times 2^{2} = 2^{405}$

Relation (2)

$32^{n} = (2^{5})^{n} = 2^{5n}$

(1) = (2) ⇔ $2^{405} = 2^{5n}$ ⇔ 5n = 405 ⇔ n = 405/5 = 81

Pour l'équation donné n est égal à 81.

Exercice 2. 2 Équations en chaîne

(1) $(x-1)(y-2) = 0$
(2) $(x-3)(z+2) = 0$
(3) $x + yz = 9$

Pour que (1) soit vrai on a soit x=1, soit y=2

Cas (1.1) prenons x= 1
Alors dans l'équation (2), z = -2 (car x =1 dans le cas 1.1).

En remplaçant x= 1 et z=-2 dans l'équation (3) il en résulte 1-2y=9, donc y=-4

Pour le cas (1.1) la solution est {x=1, y=-4, z=-2}

Cas (1.2) y = 2
Alors dans l'équation (2) on peut avoir x = 3 ou z =-2

- Si y = 2 et x = 3, alors dans l'équation (3) nous avons :

  3+2z=9, donc z = 3 et on obtient la solution {x = 3, y = 2, z = 3}

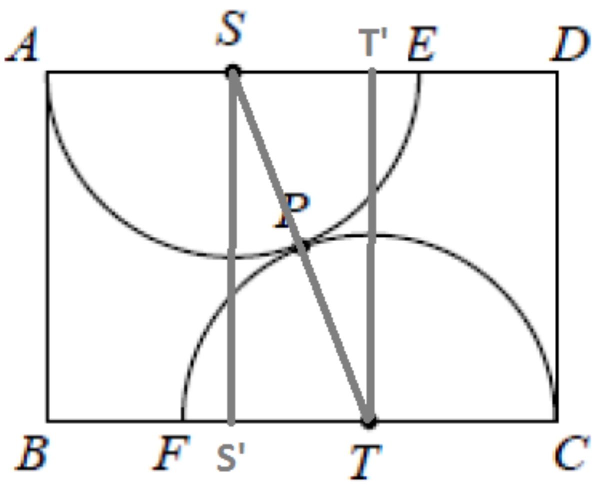
- Si y = 2 et z=-2, alors dans l'équation (3) il en résulte :

  x + (2)(-2) = 9, donc x = 13 et on obtient la solution {x = 13, y = 2, z = -2}

Ainsi, l'ensemble des solutions est

S = {{x=1, y=-4, z=-2} ; {x = 3, y = 2, z = 3} ; {x = 13, y = 2, z = -2}}

Exercice 2. 3 Contact



On va construire les segments suivants :

- [SS'] le segment perpendiculaire à [BC] partant de S avec S' appartenant à [BC].
  ASS'B est un rectangle car (AS)//(BS'), (AB)⊥(AS), (SS') ⊥(BS'),
  SS' = AB = 4, et BS' = AS = r
- [TT'] le segment perpendiculaire à [AD] partant de T avec T' appartenant à [AD].
  CTT'D est un rectangle car (DT')//(TC), (CD)⊥(DT'), (TT') ⊥(DT')
  TT' = DC = 4, et T'D = TC = r
- [ST] – segment passant par P et ST = 2r.

Dans le triangle SS'T, rectangle en S' on a :

S'T = BC – BS' – TC = 6-2r

SS' = 4

ST = 2r

D'après Pythagore on a : $ST^2 = SS'^2 + S'T^2$ ⇔

$4r^2 = 4^2 + (6-2r)^2$ ⇔ $4r^2 = 16 + 36 - 24r + 4r^2$ ⇔ $24r = 52$ ⇔

$r = 52/24 = 13/6 \approx 2.17$

Exercice 2. 4 Deux sacs de boules

Tout d'abord on calcule la somme des numéros restés dans le sac après un tirage.

Si 1 est tiré, la somme est de 2+3+4+5+6+7+8+9=44
Pour 2 tiré la somme est de 43, pour 3 on a 42, pour 4 on trouve 41, pour 5 on obtient 40, pour 6 on a 39, pour 7 on obtient 38, pour 8 on trouve 37 et pour 9 on a 36.

Les boules dans les sacs de Bruno et Chrystel ont les mêmes numéros donc la somme restante pour un même tirage est identique.

On considère dans le tableau suivant la différence (en valeur absolue) entre les sommes des boules restantes dans les sacs après un tirage aléatoire de Bruno et Chrystel.

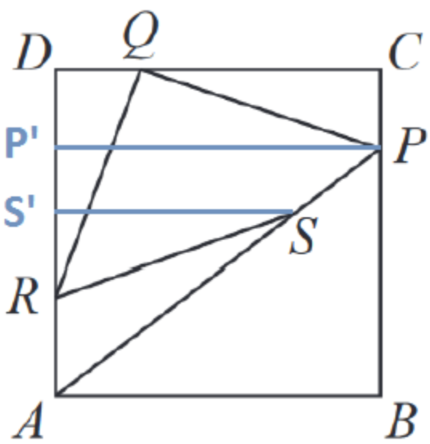
Les tirages sont aléatoires et donc équiprobables.

C\B	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Par calcul, on obtient que la probabilité d'avoir une différence divisible par 4 est de

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{nombre\ de\ cas\ probables}}{\boldsymbol{nombre\ des\ cas\ possibles}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{81}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{27}} \simeq 0.148$$

Exercice 2. 5 Partage d'un carré



$\frac{BP}{PC} = \frac{k}{4-k}$; Or on sait que BP+PC=4 => $\frac{BP}{PC} + \frac{PC}{PC} = \frac{4}{PC} \Leftrightarrow \frac{k}{4-k} + 1 = \frac{4}{PC} \Leftrightarrow$

PC = 4-k, et BP = k

De la même manière, DQ = 4-k, QC = k

RA =4- k et DR = k

Pour calculer l'aire du triangle RSA on a besoin de la dimension de la hauteur du triangle sur la base RA. On va construire cette hauteur [SS'] (segment partant de S et perpendiculaire sur (RA)) ainsi que le segment [PP'] perpendiculaire sur (DA) partant du point P, P' situé sur [DA].

PP' = DC = 4 (car DCPP' est un rectangle – DC//PP', DP'//CP, (CP)⊥(DC))

Dans le triangle APP' avec SS'//PP' d'après le théorème de Thalès nous avons $\frac{AS}{AP} = \frac{SS'}{PP'}$ (1)

$\frac{AS}{SP} = \frac{k}{4-k}$ => AS(4-k) = kSP ⇔ AS(4-k) = k(AP-AS) ⇔

4AS – kAS =kAP - kAS ⇔ 4AS = kAP ⇔ $\frac{AS}{AP} = \frac{k}{4}$ (2)

De (1) et (2) => $\frac{SS'}{PP'} = \frac{k}{4}$. Or PP' = 4 => SS' = k

Aire (PQRS) = Aire(ABCD)- Aire(DQR)-Aire(CPQ)-Aire(PBA)-Aire(RSA)

⇔ Aire (PQRS) = $4*4 - \frac{DR*DQ}{2} - \frac{CQ*CP}{2} - \frac{BP*AB}{2} - \frac{SS'*RA}{2} =$

$16 - \frac{(4-k)*k}{2} - \frac{(4-k)*k}{2} - \frac{4*k}{2} - \frac{(4-k)*k}{2} = \frac{3k^2}{2} - \frac{13k}{2} + 16 = \frac{3}{2}(k - \frac{13}{3})^2 - \frac{1073}{6}$

Dans l'équation du deuxième degré $\frac{3k^2}{2} - \frac{13k}{2} + 16$ on a $\frac{3}{2} > 0$, donc la fonction admet un minimum qui va être atteint pour $k = \frac{13}{3}$

Problème 2. 6

A - Un résultat préliminaire

1. Si l'équation admet deux solutions distinctes, alors nous pouvons écrire le polynôme sous la forme :
   $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, ou x_1, x_2 représentent les solutions du polynôme.
   Or
   $a(x- x_1)(x- x_2) = ax^2 - ax_2x - ax_1x + ax_1x_2 = ax^2 + x(-ax_2 - ax_1) + ax_1x_2$

   Il en résulte :
   $ax^2 + bx + c = ax^2 + x(-ax_2 - ax_1) + ax_1x_2$

   Par identification nous avons :
   $-ax_2 - ax_1 = b$ (1)
   $ax_1x_2 = c$ (2)

   De (2) => $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

2. Si a et c sont des signes différents, alors ac < 0 et 4ac<0
Pour un polynôme de second degré,
$\Delta = b^2 - 4ac$
Or
$b^2 >= 0$ et
$4ac<0 \Rightarrow -4ac >0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$, donc le polynôme a deux solutions x_1 et x_2
On a démonté au point 1 que $x_1x_2 = \frac{c}{a}$
a et c ont des signes différents, alors $\frac{c}{a} <0 \Rightarrow x_1x_2<0$ donc x_1 et x_2 ont des signes différents.

B - Extraction de décimales

1.a

$\pi = 3.1415926535$
$E(10\,\pi) = 31$
$10E(10\,\pi) = 10 * E(10\,\pi) = 10*31 = 310$
$E(100\pi - 10E(10\pi)) = E(314\text{-}310) = E(4) = 4$

1.b

$E(1000\pi - 10E(100\pi)) = E(3141\text{-}10E(314.159)) = E(3141 - 3140) = E(1)=1$

2.

$B(\pi) = 141592$

Algorithme permettant d'obtenir $B(x)$

```
def B(x):
   decimals = 6
   resultat = ""
   while (decimals > 0):
      currentChiffre = int((10**decimals)*x-10*int(10**(decimals-1)*x))
      result = str(currentChiffre)+ resultat
      decimals = decimals -1
   return resultat
```

C - La fonction « Password »

1. Aucune personne née avant 1890 est encore en vie => 1890 – a < 0
   Le jour j et le mois m sont forcement des nombres positifs => j>0, m>0
   Dans l'équation
   $jx2+mx+1\,890-a=0$,
   $\Delta = m^2 - 4j(1\,890-a)$
   Or $m^2 >0$ et $4j(1\,890-a)<0 \Leftrightarrow -4j(1\,890-a)>0$

Donc $\Delta > 0$, et j(1 890−a)<0 => l'équation admet deux solutions distinctes de signes différents.

2.a Pour Maeva on a :
j=19, m=6, a=1974, donc la fonction est :
$19x^2+6x+(1890-1974)=0 \Leftrightarrow 19x^2+6x-84=0$

Δ = 36- 4(-84*19) = 6420,
x1 = -2.266444
x2 = 1.950655

On ne prend que la solution positive, et B(1.950655) = 950655

La fonction *password* renvoie donc le code 950655

2.b
Nous avons démontré au point 1 que pour l'équation du second degré définie nous avons toujours deux solutions **réelles** de signes différents, donc une positive. Donc $r(j,m,a)$ retourne une valeur **réelle** positive quels que soient a,j, m.
B(r) retourne les six premiers chiffres décimale d'un nombre positif réel, donc on va toujours obtenir un mot de passe.
2.c
(i) Pour Zinedine on obtient l'équation

$x^2+6x+(1890-1998)=0 \Leftrightarrow x^2+12x-108=0$

$\Delta = 576$
$x_1 = -18$
$x_2 = 6$
$B(x_2)=0$

(ii)
Soit c = a -1890
L'équation devient : $14x^2+3x-c=0$
$\Delta = 9+56c$
Nous sommes en 2020, c sera compris entre 0<c<=130

Les racines du polynômes sont :
$x_1 =(-3+\sqrt{\Delta}) /28$
$x_2 =(-3- \sqrt{\Delta}) /28$
On garde la solution positive
$x_1 =(-3+\sqrt{\Delta}) /28$

On cherche une solution avec un x_1 entier pour avoir $B(x_1) = 0$
On remarque que pour $c=17$ on a $x_1=1$
On remarque que pour $c=62$ on a $x_1=2$

Si $c=17$, on a $17 = a -1890 \Rightarrow a = 1907$
Si $c=62$, on a $62 = a -1890 \Rightarrow a = 1952$
Albert n'étant pas centenaire, $a = 1952$
Albert a souhaité ses 68 ans le 14 mars 2020.