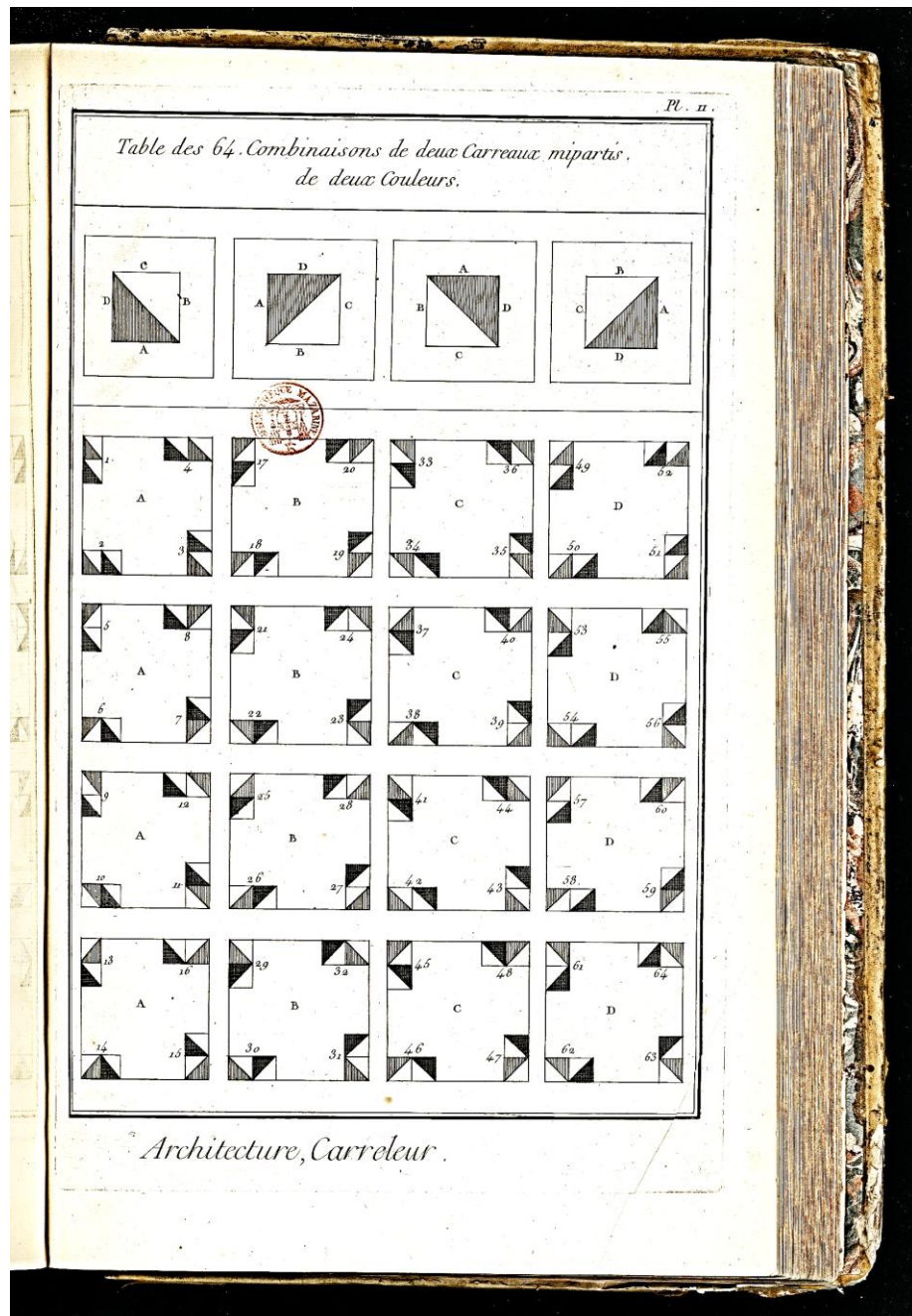


Compter



L'Encyclopédie « dictionnaire raisonné des sciences et des arts » paraît entre 1751 et 1772. Le premier volume de planches paraît en 1762. On y trouve cette planche consacrée au carreleur. Elle présente les 64 manières de carreler une pièce carrée avec des carreaux mi-partis de deux couleurs.

... hors un gros Plutarque à mettre mes rabats...



*Un ouvrage de Plutarque ayant
appartenu à Montaigne*



Plutarque (46 – 120)

« Or [Chrysippe] a dit lui-même que dix propositions sont susceptibles de plus d'un million de combinaisons, quoiqu'il n'ait pas fait, à cet égard, toutes les recherches qu'il fallait et qu'il ne se soit pas fait instruire de la vérité par des savants versés dans ces matières. Son assertion est contredite par tous les mathématiciens, et entre autres par Hipparque qui démontre qu'il y a dans son raisonnement une grande erreur de calcul, puisque, dans ces dix propositions, les affirmatives ne donnent que 103 049 combinaisons, les négatives que 310 962. » (*Plutarque Des contradictions des stoïciens*)

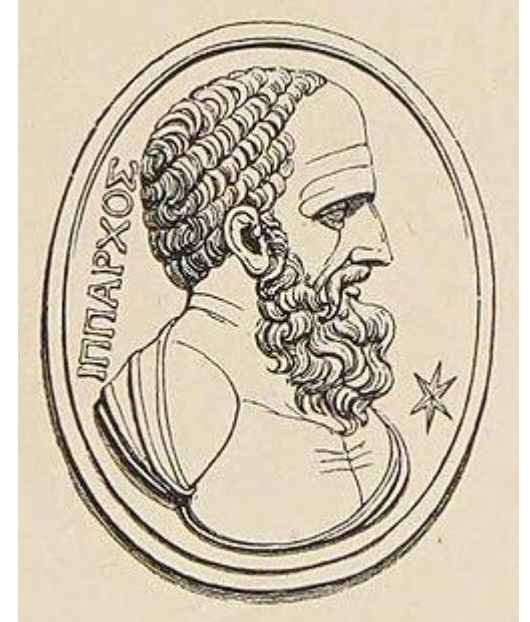
Combien de parenthèses?

Il a fallu 20 siècles pour retrouver le résultat d'Hipparque. D'abord, il fallait comprendre ce qu'il entendait par « combinaison de 10 propositions ». Ce sont des groupes de mots autour d'un verbe, on distingue aujourd'hui les propositions principales, juxtaposées, coordonnées ou subordonnées. Dans le schéma qui suit, les conjonctions sont représentées par des parenthèses :

xxxx, (xx)xx, x(xx)x, xx(xx), (xxx)x, x(xxx),

((xx)x)x, (x(xx))x, (xx)(xx), x((xx)x), x(x(xx))

*Les 11 parenthésages d'une suite
de quatre propositions*



Hipparque (190 – 120 av JC)

**On y revient
plus tard**

Principes pour compter

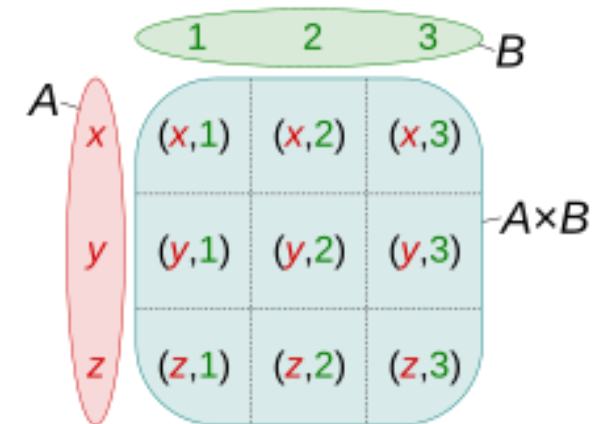
Pour compter les objets d'une collection, on dispose d'une chaîne numérique. On attribue successivement aux objets les mots-nombres. Le dernier utilisé est l'effectif de la collection.



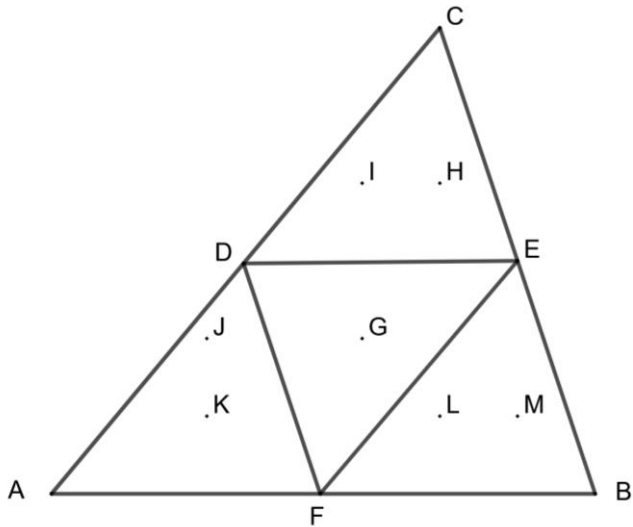
Principe des tiroirs *Pigeonhole principle*

Si on doit placer $n + 1$ objets dans n cases, une de ces cases contient au moins deux objets

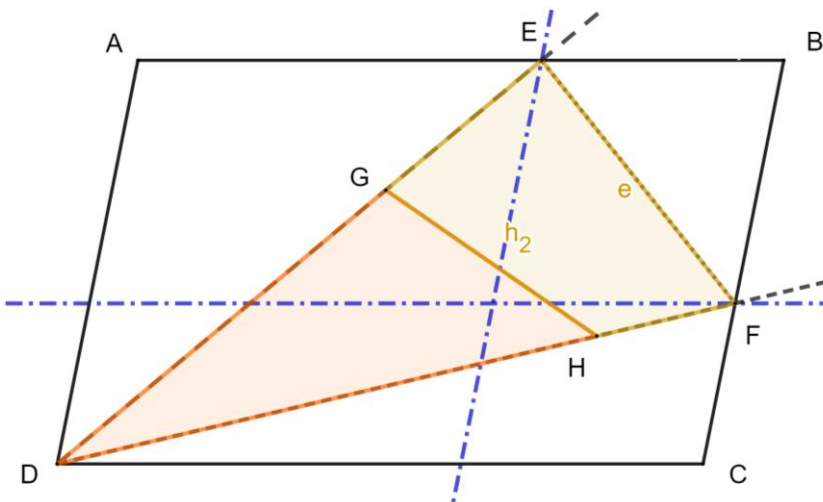
Produit cartésien Si un arbre compte n branches principales et que de chacune de ces branches partent p branches, alors l'arbre compte np branches



Les tiroirs en action (1)



Soit ABC un triangle d'aire 1. Les droites des milieux font apparaître quatre triangles d'aire $\frac{1}{4}$. Si on place neuf points à l'intérieur du triangle, un au moins des « petits » triangles en contient 3 (principe des tiroirs), qui forment donc un triangle d'aire inférieure à $\frac{1}{4}$.



Mieux : si on place sept points à l'intérieur du triangle, trois de ces points au moins seront à l'intérieur d'un des parallélogrammes ADEF, FDEB, FECD.

Un triangle situé à l'intérieur d'un parallélogramme d'aire $\frac{1}{2}$ a une aire inférieure à $\frac{1}{4}$.

Il y a mieux : il suffit de se donner 5 points pour obtenir le même résultat (Alexandre Soifer)

Les tiroirs en action (2)

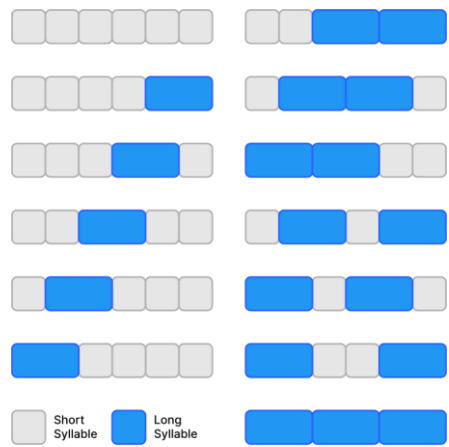
Théorème : On donne 10 nombres entiers compris entre 1 et 100. Il existe deux sous-ensembles disjoints de cet ensemble de 10 nombres ayant la même somme.

Preuve : Les sommes de 10 entiers ou moins inférieurs à 100 peuvent prendre toutes les valeurs de 1 à 955. Pour dénombrer les sous-ensembles d'un ensemble à 10 éléments, on peut noter 1 si un des nombres est dedans, 0 s'il n'y est pas. Le *principe multiplicatif* (un autre aspect du produit cartésien) nous fournit $2^{10} - 1 = 2\,023$ sous-ensembles. $2\,023 > 955$, donc il y a des sommes identiques.

Si on trouve deux sommes identiques possédant des termes en commun, en ôtant ces termes on trouve deux nouvelles sommes identiques.



« Il y a au moins deux australiens ayant le même nombre de cheveux »
(Pourquoi des australiens?)



Du sanskrit aux lapins

Pingala (env. 200 avant JC), spécialiste indien de la grammaire et de la versification, travaille sur l'alternance de syllabes brèves ou longues : un vers de n *matras* peut se terminer par une syllabe longue de 2 *matras* (qui achève dans ce cas une séquence de $n - 2$ *matras*) ou par une syllabe courte de 1 *matra* (qui achève une séquence de $n - 1$ *matras*).

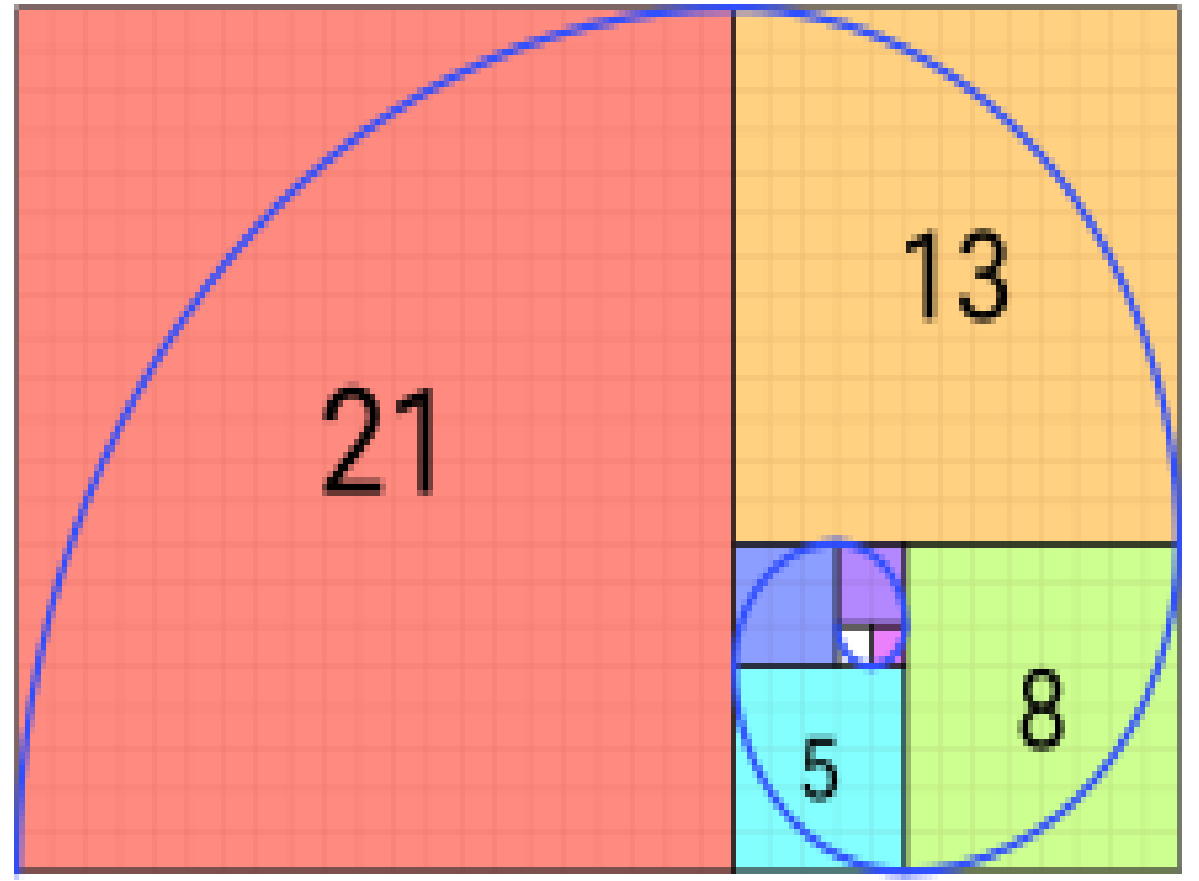
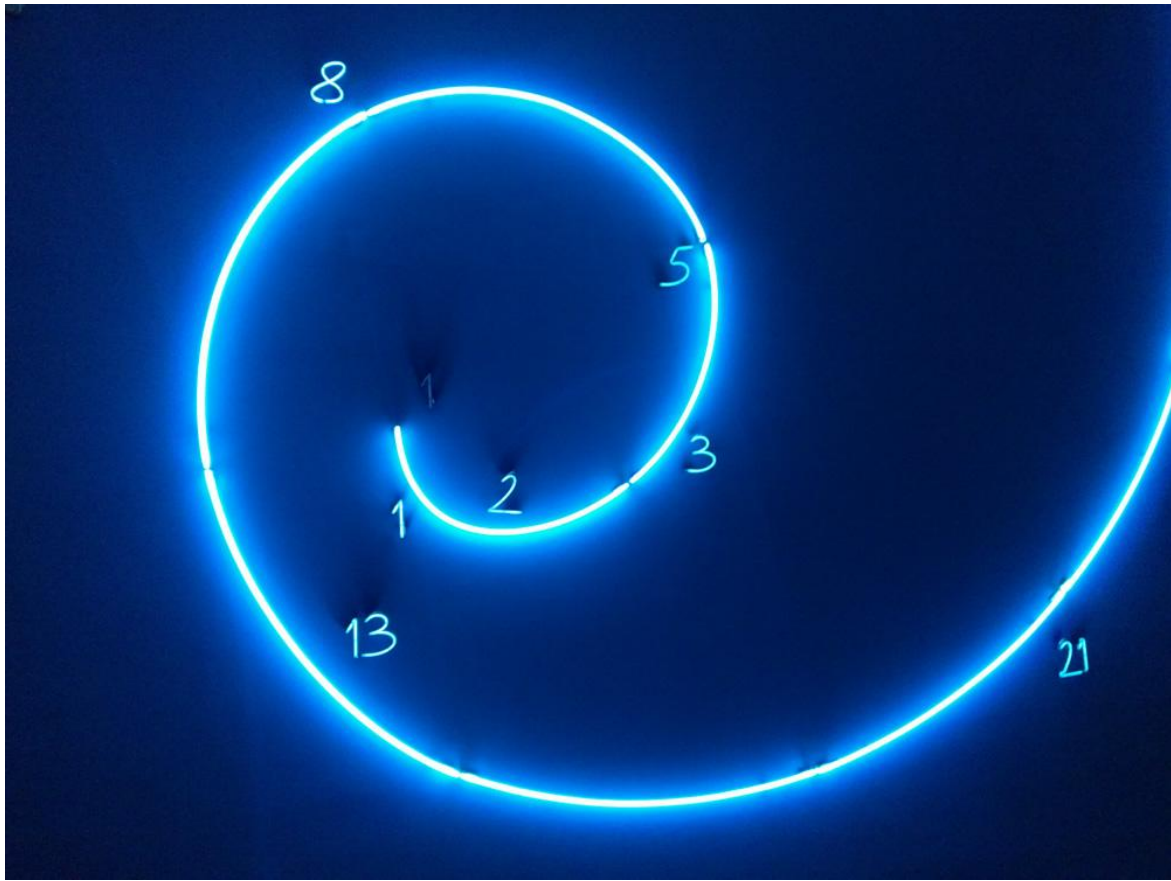
$$V(n) = V(n - 2) + V(n - 1)$$

Léonard de Pise (1170-1250) prend l'image d'un élevage de lapins, qui inspirera le malheureux Jean de Florette. La « suite de Fibonacci » est née.



Naples, station Vanvitelli



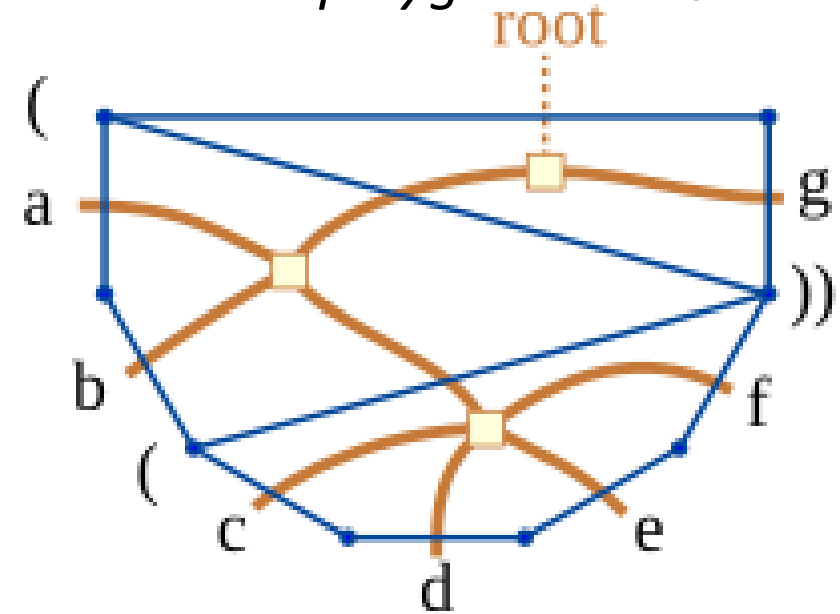


Spirales de Fibonacci

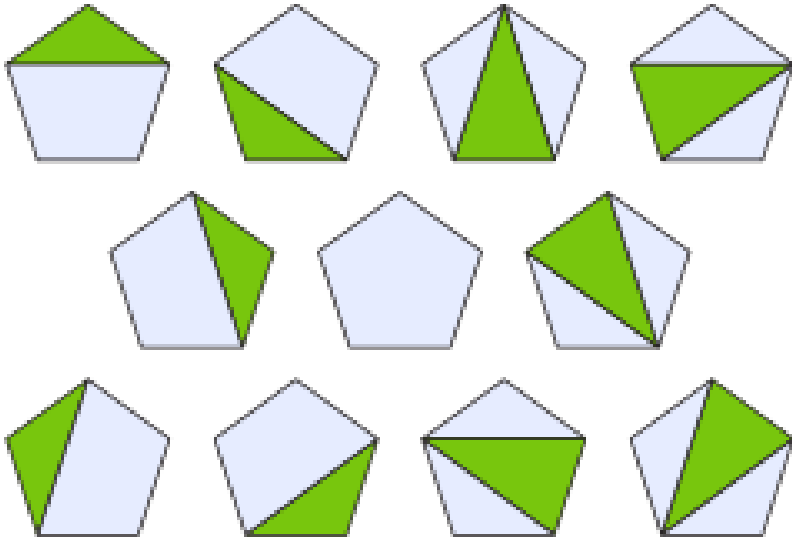
Nombres de Schröder- Hipparque

Une suite de 10 « mots » peut être scindée en (9 et 1), il y a 10 possibilités, (8, 1 et 1), il y a $10 \times 9 \times 8$ possibilités, (8 et 2), il y a 10×9 possibilités, etc. David Hough, encore étudiant, fit le calcul en 1994 et reconnut les *nombres de Schröder* (logicien allemand, 1841 – 1902). Schröder a notamment établi la correspondance entre *le nombre de façons d'insérer des parenthèses dans une suite de n symboles*, *le nombre de subdivisions d'un polygone à $n + 1$ côtés en triangles par l'adjonction de diagonales* et *le nombre d'arbres enracinés à n feuilles dont les nœuds internes ont au moins deux enfants*.

La figure représente la suite parenthésée $(ab(cdef))g$ et ses correspondants, le graphe marron et le partage du polygone bleu.



Partage d'un pentagone

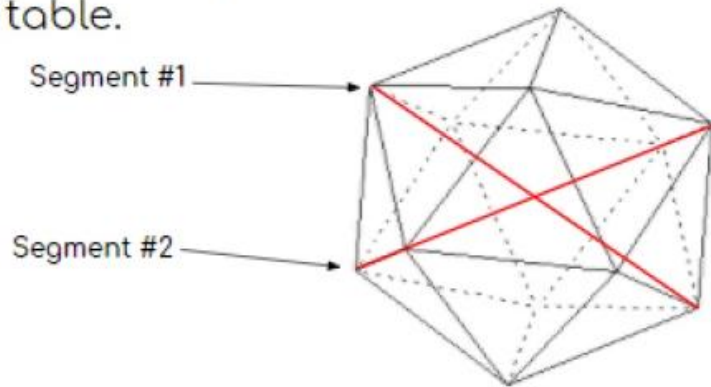


Leonhard Euler (1707-1783) s'intéressait aux différentes façons de partager un polygone en triangles en utilisant des diagonales n'ayant qu'un point commun (un sommet). Ce sont les *nombres de Catalan* (mathématicien franco-belge 1814 – 1894) qui expriment la réponse.

On voit la différence avec le problème du parenthésage (Catalan limitait les suites à des groupes de deux)

Polyèdres réguliers convexes

Dans un polyèdre convexe, tous les segments qui relient deux sommets se retrouvent à l'intérieur de la forme. Il est également possible de déposer toutes les faces sur une table.



Les faces sont des polygones réguliers

- Si ce sont des triangles équilatéraux, il y en a au plus 5, car $6 \times 60 = 360$

Tétraèdre, octaèdre, icosaèdre

- Si ce sont des carrés, il y en a au plus 3, car $4 \times 90 = 360$

Cube

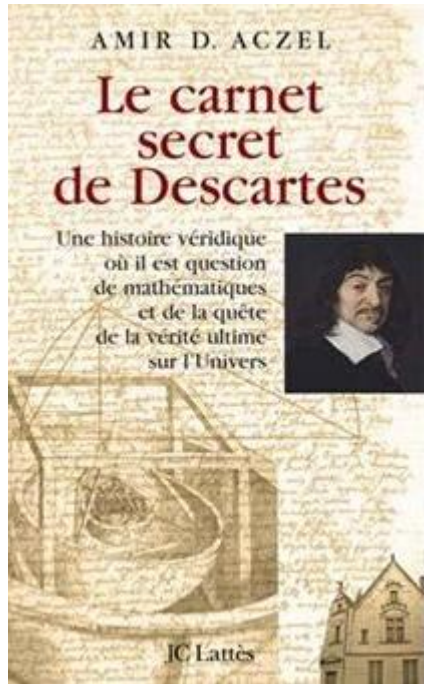
- Si ce sont des pentagones, il y en a au plus 3, car $4 \times 108 = 432$

Dodécaèdre

- Ce ne peut pas être des hexagones, car $6 \times 60 = 360$

Ce n'est quand même pas fini...

La formule de Descartes - Euler



Le 1^{er} juin 1676, G.-W. Leibniz se rend à Paris et se fait remettre un carnet conservé dans les papiers du défunt Descartes. On retrouve plus tard une copie conservée par Leibniz, dans laquelle on lit :

«L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre de sommets diminué de 2. »

Descartes écrit que la somme des angles est $2\pi (s - 2)$

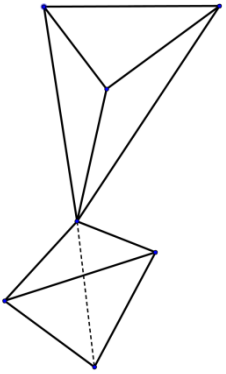
La somme des angles d'une face à n côtés est $\pi (n - 2)$. Si on fait la somme on obtient $(2a - 2f)\pi$. La formule dite « formule d'Euler » est :

$$a - f = s - 2$$

« Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée; car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux même qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont. » (*Discours de la méthode*, 1637)

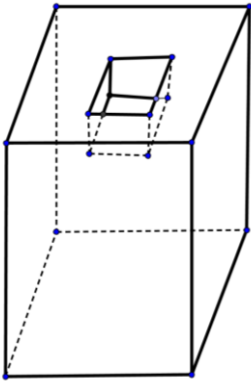
Un théorème changé en définition

Deux tétraèdres



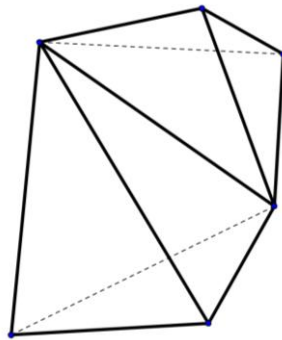
7 sommets
12 arêtes
6 faces
 $S - a + f = 1$

Prisme creusé



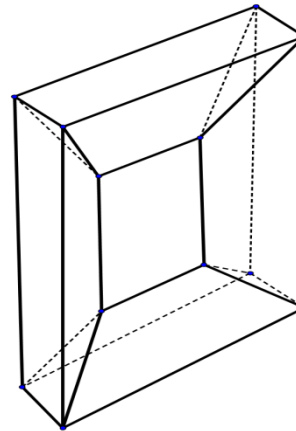
16 sommets
24 arêtes
11 faces
 $S - a + f = 3$

Deux tétraèdres



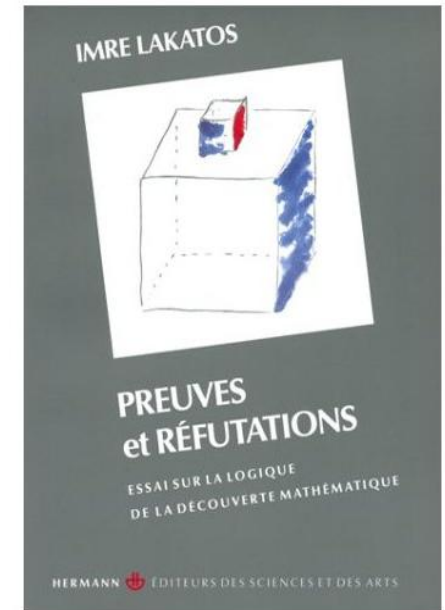
6 sommets
11 arêtes
8 faces
 $S - a + f = 3$

Cadre à bord
prismatique



12 sommets
24 arêtes
12 faces
 $S - a + f = 0$

La formule d'Euler n'est pas vraie pour nombre de polyèdres, ce qui a poussé à appeler *eulériens* les polyèdres qui la vérifient (dont les polyèdres convexes).



**Il y a trois sortes de
mathématiciens :
ceux qui savent compter
et ceux qui ne savent pas
compter**