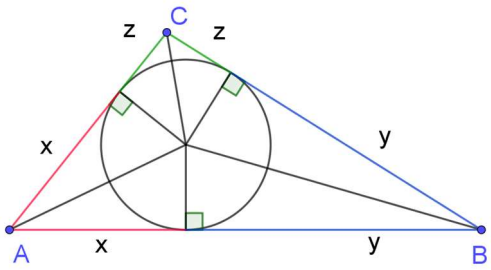
Exercice 1 du thème Fonctions
Solution proposée par M. Marguerite

Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que :

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc.$$



Dans un problème faisant intervenir 3 variables réelles, effectuer une transformation de Ravi (Ravi Vakil mathématicien canadien 1970 -) revient à poser bijectivement :

$$(S)\begin{cases}a=y+z\\b=z+x.\\c=x+y\end{cases}$$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-c=2z\\b=z+x\\c=x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{a+b-c}{2}\\x=b-\frac{a+b-c}{2}\\y=c-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{a+b-c}{2}\\x=\frac{b+c-a}{2}\\y=c-\frac{b+c-a}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{a+b-c}{2}\\x=\frac{b+c-a}{2}\\y=\frac{a+c-b}{2}\end{cases}.$$

L'inégalité initiale devient :

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$

$\Leftrightarrow 2(y+z)^2x+2(x+z)^2y+2(x+y)^2z\leq 3(y+z)(x+z)(x+y)$

$\Leftrightarrow 2x(y^2+2yz+z^2)+2y(z^2+2zx+x^2)+2z(z^2+2xy+y^2)\leq 3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz)$

$\Leftrightarrow 2(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+12xyz\leq 3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz$

$\Leftrightarrow 6xyz\leq x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$

Or, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, $(abc)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{a+b+c}{3}$ pour tous nombres a, b, c positifs. Donc

- $(x^3y^3z^3)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{3}$ soit $3xyz\leq x^2y+y^2z+z^2x$ (1)
- $(x^3y^3z^3)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{x^2z+y^2x+z^2y}{3}$ soit $3xyz\leq x^2z+y^2x+z^2y$ (2)

En ajoutant membre à membre les inégalités (1) et (2) : $6xyz\leq x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$.