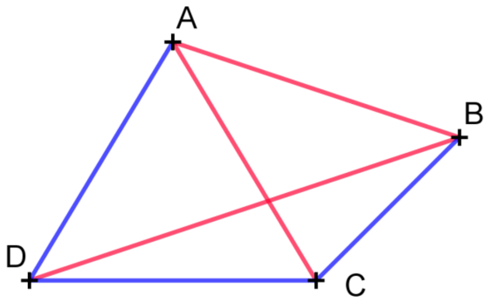
Olympiades 2020
Académie de Versailles
Éléments de solution

Exercice 5

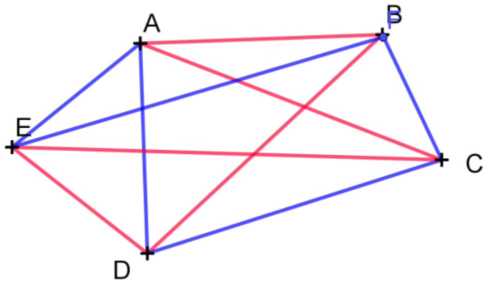
Colorations

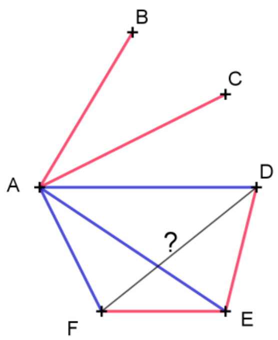
Avertissement : il arrive dans la suite qu'on fasse référence à une figure explicite. Ce n'est pas ici fautif, car l'ordre des points ou la convexité n'interviennent pas. À la question ***4****, on raisonne sur une figure possédant deux triangles monochromes bleus ayant un côté commun. C'est le* minimum minimorum, *si on peut dire, du cas de l'hexagone, car il est un minimum pour le nombre d'arêtes concernées.*



1. Sur la figure ci-contre, les triangles ABC et ABD ont deux côtés rouges et un bleu, les triangles ACD et BCD ont deux côtés bleus et un rouge.

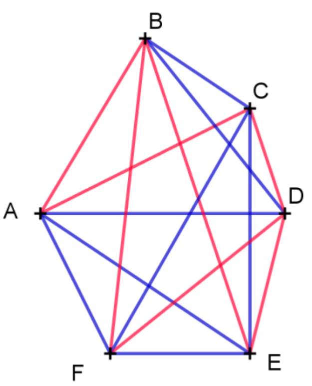
2. Dans le cas $n = 5$, on complète la figure précédente par le point E et les segments issus de E, en veillant à ce que ces segments ne créent pas de triangle monochrome.



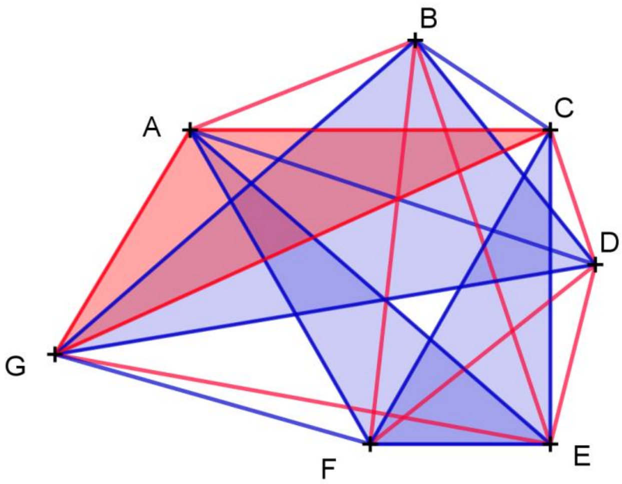


3. ***a.*** Cinq segments joignent A aux autres sommets de l'hexagone. Il y a deux couleurs, donc au moins trois sont de la même couleur (peu importe qu'ils soient voisins comme sur la figure ou non). Pour éviter que les triangles ADE et AEF soient monochromes, on donne aux segments [DE] et [FE] l'autre couleur, mais si on fait de même avec le segment [FD], c'est le triangle DEF qui est monochrome. Donc il y a au moins un triangle monochrome.

b. Il y a cinq segments de sommet A, donc dix couples (B, C), (B, D), (B, E), (B, F), (C, D), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F), (E,F) susceptibles d'être rouges-bleus de sommet A. Si tous les segments issus de A sont rouges, il n'y a aucun couple rouge-bleu de sommet A. Si seul le segment [AF] est bleu, il y a 4 couples rouge-bleu : (B, F), (C, F), (D, F) et (E, F). Si les segments [AE] et [AF] sont bleus, les couples (B, E), (B, F), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F) sont rouge-bleu de sommet A. Le décompte qui vient d'être fait est indépendant de l'ordre des points. On conclut par symétrie : 6 est le maximum (un couple bleu-rouge dans un sens est rouge-bleu dans l'autre).



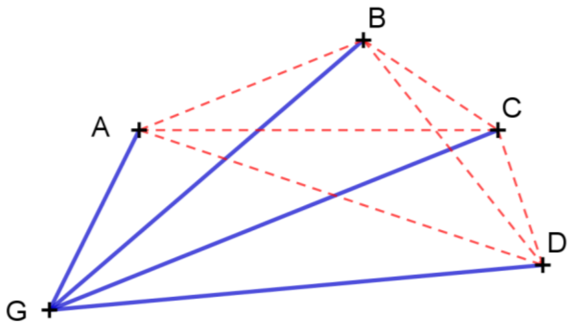
c. Ce maximum peut-il être atteint en tout sommet de l'hexagone ? S'il en était ainsi, il y aurait 36 couples rouge-bleu dont chaque triangle non-monochrome contient exactement 2 (si [MN] est rouge, [NP] bleu et par exemple [PM] bleu, il y a un couple rouge-bleu de sommet M et un de sommet N). Cela donne au maximum 18 triangles non-monochromes… sur 20. Il reste donc (au minimum, cette fois) 2 triangles monochromes.



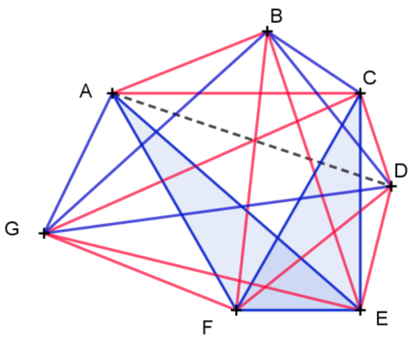
d. Dans la figure ci-contre, les triangles AEF et CEF sont les seuls triangles monochromes dont les côtés soient des diagonales ou des côtés d'un hexagone.

4. ***a.*** La figure de gauche montre un heptagone avec quatre triangles monochromes, un rouge et trois bleus.

b. On ajoute le point G à la figure de l'hexagone précédent qui comporte le minimum de triangles monochromes, 2. Supposons que ces deux triangles monochromes sont bleus et ont un côté commun (possible sans restreindre la généralité d'après ce qui précède).
Six arêtes ont pour extrémité le point G.
- Si ces six sont bleues, chaque arête bleue appartenant à un triangle monochrome bleu (il y en a cinq) donne naissance à un nouveau triangle monochrome bleu dont le troisième sommet est G. Au total, nous avons au minimum 7 triangles monochromes bleus ;
- si cinq de ces arêtes sont bleues, ou bien c'est [GB] qui est rouge et les cinq arêtes bleues [AF], [AE], [FE], [EC] et [FC] donnent naissance à cinq triangles monochromes bleus comme précédemment. Soit c'est [GA] et les arêtes [FE], [FC], [EC] donnent naissance à trois triangles monochromes bleus, ce qui fait un total de cinq. Même situation si c'est [GC]. Si c'est [GE], il reste [AF] et [CF] (même situation si c'est [GF]) pour donner naissance à deux tringles monochromes bleus, soit au minimum 4.
- si deux de ces arêtes sont rouges et que l'une est [GB], on retrouve une des situations évoquées. Si ce sont [GA] et [GC], il ne reste que [EF] pour donner naissance à un triangle monochrome bleu GEF, mais alors GAC est monochrome rouge (car si [AC] était bleue, le triangle AFC serait monochrome bleu, ce qui en ferait trois pour l'hexagone, au-dessus du minimum). Si ce sont [GA] et [GE] (ou, en changeant ce qui doit être changé [GA] et [GF], ou [GC] et [GE] ou [GC] et [GF]), il reste [FC] pour donner naissance à un triangle monochrome bleu et, parmi



les triangles GBC, GBD, GBF, GCD, GCF, GDF, il y en a au moins un monochrome bleu à moins que l'un parmi BCD, BCF, CDF soit monochrome rouge (cf. **3.** ***a.***) Enfin, si ce sont [GE] et (GF], la seule façon de ne pas rendre plus de deux triangles monochromes bleus parmi GAB, GAC, GAD, GBC, GBD, GCD est d'avoir un monochrome rouge parmi ABC, ABD, ACD, BCD, n'avoir qu'un monochrome bleu se traduisant par l'apparition d'un monochrome rouge.
- enfin, si trois de ces arêtes sont rouges et trois bleues, comme cela vient d'être rappelé, chaque groupe de trois crée au moins un triangle monochromatique. Cas particulier : ce pourrait être un des triangles monochromes bleus. Supposons donc que les arêtes [GA], [GB], [GD] sont bleues et les autres rouges. Deux des côtés du triangle ABD sont de couleurs différentes (sinon, cela ferait un troisième triangle monochrome dans l'hexagone). Supposons que [BD] est bleue et [AB] rouge. Le triangle ABD est donc monochrome bleu. Si [AD] est rouge, alors,



comme [AC] est rouge (sans quoi ACF est monochrome bleu), le triangle ACD est monochrome rouge (interdit dans l'hexagone) sauf si [CD] est bleue. Mais si [CD] est bleue, le triangle BCD est monochrome bleu (interdit dans l'hexagone) à moins que [BC] soit rouge, mais alors cela ferait un nouveau triangle monochrome rouge dans l'hexagone. Donc [AD] est bleue et il y a deux nouveaux triangles monochromes bleus.
Le minimum du nombre de triangles monochromes pour un heptagone est donc 4.