

## CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2002

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

*Les premières questions de chacune des trois premières parties de ce problème sont indépendantes des autres parties. Il n'est donc pas obligatoire de commencer l'étude dans l'ordre indiqué, à condition d'indiquer la question traitée en respectant l'indexation du texte.*

*Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

\*\*\*  
\*

Dans tout le problème, un triangle  $ABC$  est la figure déterminée par les trois points  $A, B, C$  supposés non alignés. Conformément à la tradition, les longueurs de ses côtés seront notées  $a = BC$ ,  $b = CA$  et  $c = AB$ , et  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  et  $\widehat{C}$  sont les mesures en radians, comprises entre 0 et  $\pi$ , de ses angles.

Les trois premières parties se déroulent dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  associé aux coordonnées  $(x, y)$  (ou  $(X, Y)$ ).

Tournez la page, S. V. P.

### Première Partie

Soit  $ABC$  un triangle. On note  $P$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(BC)$  et  $D$  le symétrique du point  $C$  par rapport à la droite  $(AP)$ .

On dit que ce triangle est *pseudo-rectangle* en  $A$  si  $|\widehat{B} - \widehat{C}| = \frac{\pi}{2}$ .

On précise qu'il est *pseudo-rectangle* en  $A$ , *obtus* en  $B$  dans le cas où  $\widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$ .

1. Montrer que le triangle  $ABC$  est pseudo-rectangle en  $A$  si et seulement si le triangle  $ABD$  est rectangle en  $A$ .
2. Montrer que  $PA^2 = PB \cdot PC$  si et seulement si le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  ou pseudo-rectangle en  $A$ .
3. Montrer que le triangle  $ABC$  est pseudo-rectangle en  $A$  si et seulement si son orthocentre est le symétrique du point  $A$  par rapport à la droite  $(BC)$ .
4. Soit  $R$  le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Montrer que  $PB + PC = 2R$  si et seulement si  $ABC$  est rectangle en  $A$  ou pseudo-rectangle en  $A$ .
5. Montrer que le triangle  $ABC$  est pseudo-rectangle en  $A$  si et seulement si la droite  $(AP)$  est tangente au cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .
6. Dans le plan complexe associé au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on note  $\alpha, \beta, \gamma$  les affixes des points non alignés  $A, B, C$ .
  - a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)^2}$  pour que le triangle  $ABC$  soit pseudo-rectangle en  $A$ .
  - b) On suppose  $\beta = -\gamma = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Déterminer l'ensemble  $(E_1)$  des points  $A$  du plan tels que le triangle  $ABC$  soit pseudo-rectangle en  $A$ .
  - c) On suppose  $\beta = -\gamma = 1$ . Déterminer l'ensemble  $(E_2)$  des points  $A$  du plan tels que le triangle  $ABC$  soit pseudo-rectangle en  $A$ .
  - d) Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de  $(E_2)$  à  $(E_1)$  ?

### Deuxième Partie

1. Soit  $(a, b, c)$  un triplet de réels strictement positifs. Établir l'équivalence des conditions suivantes :

[i] il existe un triangle  $ABC$  pseudo-rectangle en  $A$  et obtus en  $B$  tel que  $AB = c, BC = a$  et  $CA = b$  ;

[ii]  $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$  ;

[iii] il existe deux réels  $\rho$  et  $\theta$  vérifiant  $\rho > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  et  $a = \rho \cos 2\theta, b = \rho \cos \theta$  et  $c = \rho \sin \theta$ .

Ces conditions étant réalisées, montrer que  $\theta$  mesure l'un des angles du triangle  $ABC$ . Comment peut-on interpréter géométriquement  $\rho$  ?

2. Soit  $ABC$  un triangle pseudo-rectangle en  $A$ , obtus en  $B$  et dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels ; soit  $\rho$  et  $\theta$  les deux réels définis au 1. [iii].

Dans cette question, on pourra utiliser sans justification les formules trigonométriques suivantes vérifiées par tout réel  $\varphi$  pour lequel  $\tan \varphi$  est définie :

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}.$$

a) Montrer que  $\rho$  est rationnel et en déduire que  $\tan \frac{\theta}{2}$  est rationnel. Soient  $p$  et  $q$  les entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{p}{q}$ .

b) Vérifier que  $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$  et établir l'existence d'un rationnel strictement positif  $r$  tel que

$$\begin{aligned} a &= r(p^4 - 6p^2q^2 + q^4), \\ b &= r(q^4 - p^4), \\ c &= 2pqr(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

3. Montrer réciproquement que les formules du 2. b) définissent les longueurs des côtés d'un triangle pseudo-rectangle en  $A$ , obtus en  $B$  et dont les longueurs des côtés sont rationnelles.

4. a) Soient  $p$  et  $q$  deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Déterminer le plus grand diviseur commun aux trois entiers  $p^4 - 6p^2q^2 + q^4$ ,  $q^4 - p^4$ ,  $2pq(p^2 + q^2)$  (on discutera suivant la parité de  $p$  et  $q$ ).

b) Décrire les triplets d'entiers  $(a, b, c)$  tels qu'il existe un triangle  $ABC$ , pseudo-rectangle en  $A$  obtus en  $B$ , tel que  $AB = c$ ,  $BC = a$  et  $CA = b$ .

5. Résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  l'équation  $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$ .

6. Résoudre dans  $\mathbb{Q}^*$  l'équation  $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$ .

7. Résoudre dans  $\mathbb{N}^*$  l'équation  $x^2(y^2 - z^2)^2 = (y^2 + z^2)^3$ .

### Troisième Partie

Soit  $\mathcal{H}$  la courbe définie par  $x \geq 1$  et  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ . Soient  $A$  un point de  $\mathcal{H}$  et  $(r, s)$  le couple de ses coordonnées. On note  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan définie par les relations  $1 \leq x \leq r$  et  $y^2 \leq x^2 - 1$ .

1. Calculer  $\mathcal{A}$  en fonction de  $r$  et de  $s$  (on pourra par exemple effectuer une rotation du repère d'angle  $-\pi/4$ ).

2. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent en utilisant une méthode dont le principe remonte à Fermat, sans doute peu après 1658 : « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad ultimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usu » (Œuvres complètes, Tome I, pages 225-285).

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $u$  un réel positif tel que  $u^n = r + s$ . Pour tout entier  $k$  entre 1 et  $n$ , on considère le trapèze rectangle  $T_k$  (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées  $(u^{k-1}, 0)$  et  $(u^k, 0)$ , dont les bases ont pour pente  $-1$  et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de  $\mathcal{H}$  d'abscisse  $\frac{u^{k-1} + u^{1-k}}{2}$ .

Tournez la page, S. V. P.

a) On définit bien ainsi, pour chaque valeur de  $k$ , un unique trapèze  $T_k$  (réduit à un triangle lorsque  $k = 1$ ) : illustrer par un croquis.

b) Pourquoi peut-on conjecturer que la somme des aires de ces trapèzes admet  $\frac{\mathcal{A} + s^2}{2}$  comme limite lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

c) Démontrer la conjecture précédente en utilisant une autre suite de trapèzes combinée à la première.

d) Retrouver la valeur de  $\mathcal{A}$ .

**3.** Soient  $B$  et  $C$  les points de coordonnées respectives  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  et  $A$  un point de coordonnées  $(x, y)$  avec  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$  tel que le triangle  $ABC$  soit pseudo-rectangle en  $A$ .

On note  $S$  l'aire du triangle  $ABC$  et  $S'$  l'aire de la partie du plan constituée des points de la plaque triangulaire définie par le triangle  $ABC$  dont les coordonnées  $(X, Y)$  vérifient  $Y^2 \leq X^2 - 1$ .

Étudier une éventuelle limite lorsque  $x$  tend vers l'infini du rapport  $\frac{S'}{S}$ .

### Quatrième Partie

Cette partie se déroule dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  associé aux coordonnées  $(x, y, z)$ .

Dans le plan d'équation  $z = 0$ , soit  $(C)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 et soient  $T$  et  $P$  deux points distincts tels que la droite  $(TP)$  soit tangente au cercle  $(C)$  en  $T$ . Soient  $B$  et  $C$  les intersections de la droite  $(OP)$  avec le cercle  $(C)$  et  $(D)$  la droite perpendiculaire au plan d'équation  $z = 0$  passant par  $P$ .

**1.** a) Montrer qu'il existe deux points  $A$  et  $A'$  appartenant à la droite  $(D)$  tels que les triangles  $ABC$  et  $A'BC$  soient pseudo-rectangles respectivement en  $A$  et  $A'$  ; donner une construction simple de ces deux points.

b) Montrer que les coordonnées de ces deux points vérifient l'égalité  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ .

**2.** Soit  $(H)$  l'ensemble des points  $A$  et  $A'$  quand  $T$  et  $P$  varient.

a) Quelle est l'intersection de l'ensemble  $(H)$  avec un plan orthogonal à  $\vec{w}$  ?

b) Quelle est l'intersection de l'ensemble  $(H)$  avec un plan contenant la droite  $(O; \vec{w})$  ?

c) Montrer que l'ensemble  $(H)$  est inclus dans une réunion de droites que l'on précisera.

**3.** On s'intéresse dans cette dernière question aux points entiers de l'ensemble  $(H)$ , c'est-à-dire aux éléments de  $(H)$  dont les trois coordonnées sont des nombres entiers.

a) Soit  $(x, y, z)$  le triplet des coordonnées d'un tel point. Montrer que  $x$  ou  $y$  est impair.

On note désormais  $\mathcal{S}$  l'ensemble des triplets  $(x, y, z)$  d'entiers naturels strictement positifs tels que  $x$  est impair et  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ .

b) Soit  $d$  un entier strictement positif fixé. Démontrer que l'ensemble des éléments  $(x, y, z)$  de  $\mathcal{S}$  tels que  $\text{PGCD}(x + 1, y + z) = d$  est l'ensemble vide si  $d$  est impair et un ensemble infini si  $d$  est pair.

c) Soit  $m$  un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Combien y a-t-il d'éléments  $(x, y, z)$  de  $\mathcal{S}$  tels que  $x = m$  ? Déterminer ces éléments lorsque  $m = 3, 5, 7, 9$ .

\*\*\*  
\*