CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2018

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminales ES et L

DURÉE : 5 HEURES

La calculatrice est autorisée conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

PROBLÈME I

On lance indéfiniment une pièce dont la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0,1[$, et celle de tomber sur Face est $q = 1-p$. On suppose les lancers indépendants.

1° Dans cette question, on lance la pièce trois fois.

(a) Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur Face lors des deux premiers lancers et sur Pile lors du troisième lancer ?

(b) Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur Face lors des trois lancers ?

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on pose $p_k = q^{k-1} - q^k$. On définit de plus

$$S_k = p_1 + \cdots + p_k \quad \text{et} \quad E_k = p_1 + 2p_2 + \cdots + kp_k.$$

2° Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Montrer $p_k = pq^{k-1}$.

(b) Montrer $S_k = 1 - q^k$.

(c) Montrer $E_3 = 1 + q + q^2 - 3q^3$.

(d) Montrer $E_k = 1 + q + \cdots + q^{k-1} - kq^k$.

3° (a) Déterminer la limite de la suite (S_n).

(b) On admet que la suite (nq^n) converge vers 0.
Montrer que la suite (E_n) converge vers une limite E égale à $\dfrac{1}{p}$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On lance la pièce n fois successivement et on s'intéresse à la première apparition de Pile. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de cette première apparition de Pile dans les n lancers quand elle existe, avec la convention que $X_n = 0$ si la pièce ne tombe jamais sur Pile dans les n lancers. Autrement dit :

- $X_n = 0$ si la pièce tombe toujours sur Face lors des n lancers ;
- $X_n = 1$ si la pièce tombe sur Pile lors du premier lancer ;

et, pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$,

- $X_n = k$ si la pièce tombe sur Face lors des $k-1$ premiers lancers et sur Pile lors du lancer numéro k.

4° On conserve les notations qui précèdent, et on note $P(A)$ la probabilité d'un événement A.

(a) Pour k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, montrer que $P(X_n = k) = p_k$.

(b) Déterminer $P(X_n = 0)$.

(c) Donner une interprétation probabiliste de la question 3°(a).

5° (a) Que représente E_n ?

(b) Donner une interprétation probabiliste de la question 3°(b).

6° On rappelle que E a été défini dans la question 3°(b). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Q_n = \dfrac{E_n}{E}$.
On s'intéresse au graphique reliant les points de coordonnées (S_n, Q_n).

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = S_n - np(1 - S_n)$.

(b) Vérifier que $n = \dfrac{\ln(1-S_n)}{\ln q}$, puis $Q_n = S_n - \dfrac{p}{\ln q}(1-S_n)\ln(1-S_n)$.

(c) En déduire une fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = f(S_n)$.

7° (a) Justifier que f est convexe sur $[0,1[$ et calculer $f(0)$.

(b) On admet que $z\ln(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(c) Que peut-on dire de la position de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$? Donner l'allure de la courbe de f sur $[0,1[$.

8° (a) Vérifier qu'une primitive de la fonction $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ sur $[0,1[$ est $x \mapsto \dfrac{(1-x)^2}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \ln(1-x)\right)$.

(b) Soit $A \in]0,1[$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx$.

(c) On appelle indice de Gini associé à la fonction f le réel égal à deux fois l'aire située entre la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
Déduire de ce qui précède que l'indice de Gini associé à f est $G(p) = -\dfrac{p}{2\ln(1-p)}$.

PROBLÈME II

L'objectif de ce problème est d'étudier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation

$$x^n = x^{n-1} + \cdots + x + 1$$

où l'inconnue x est un nombre réel.

1° Soit P_2 la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par

$$P_2(x) = x^2 - x - 1.$$

Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$. Montrer que l'une des solutions est strictement inférieure à 0 et que l'autre solution est strictement supérieure à 1.

2° Soit P_3 la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par

$$P_3(x) = x^3 - x^2 - x - 1.$$

(a) En étudiant les variations de P_3, montrer que l'équation $P_3(x) = 0$ admet une unique solution réelle, que l'on notera a_3 et qu'on ne cherchera pas à calculer. Montrer que $a_3 > 1$.

(b) Écrire un algorithme qui donne une valeur approchée de a_3 à 10^{-3} près.

3° Soit P_4 la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par

$$P_4(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1.$$

Montrer que l'équation $P_4(x) = 0$ admet deux solutions a_4 et b_2 telles que $b_2 < 0 < 1 < a_4$. On ne cherchera à calculer ni a_4 ni b_2.

On se place maintenant dans le cas général.
On désignera désormais par n un entier supérieur ou égal à 2.
On note P_n la fonction polynôme définie, pour tout nombre réel x, par

$$P_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k,$$

et on pose, pour tout nombre réel x, $Q_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$.

4° (a) Donner une expression de $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ lorsque x est réel et $x \neq 1$.

(b) En déduire que, pour tout nombre réel x, $P_n(x) = 0$ implique $Q_n(x) = 0$.

(c) L'implication réciproque est-elle vraie ?

5° (a) Calculer la fonction dérivée de Q_n et résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $Q'_n(x) = 0$.

(b) Donner le tableau de variations de Q_n sur $[0, +\infty[$. Préciser les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(2)$.

(c) En déduire que, dans l'intervalle $]1, 2[$, l'équation $Q_n(x) = 0$ possède une unique solution. On note a_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.

(d) Montrer que a_n est l'unique solution positive ou nulle de l'équation $P_n(x) = 0$.

6° Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$?

On admet le théorème d'encadrement suivant : si (u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites réelles telles que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

7° Montrer que la suite (a_n) est convergente et donner sa limite.

Dans les questions suivantes, on suppose que n est un entier naturel pair supérieur ou égal à 2.
On note k l'entier tel que $n = 2k$.

8° (a) Montrer que Q_{2k} est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.
(b) Préciser $Q_{2k}(-1)$.
(c) Montrer que l'équation $P_{2k}(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $]-1, 0[$. On note b_k cette solution.
(d) Combien l'équation $P_{2k}(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

9° (a) Montrer que, pour tout nombre réel appartenant à $]-1, 0[$, on a $Q_{2k+2}(x) \geqslant Q_{2k}(x)$.
(b) En déduire le signe de $Q_{2k+2}(b_k)$.
(c) Montrer $b_{k+1} \leqslant b_k$.

Les questions précédentes permettent d'établir que la suite (b_k) est une suite décroissante dans $]-1, 0[$. On admet que cela entraîne que cette suite converge vers un nombre réel ℓ appartenant à $[-1, 0]$. Le but de la question suivante est de montrer que $\ell = -1$.

10° (a) Pour tout entier k, déterminer le signe de $Q_{2k}(\ell)$.
(b) Soit $x \in]-1, 0[$. Que peut-on dire de $Q_{2k}(x)$ quand k tend vers l'infini ?
(c) En déduire que $\ell = -1$.

11° Montrer que la suite $({b_k}^{2k})$ converge vers une limite qu'on déterminera.