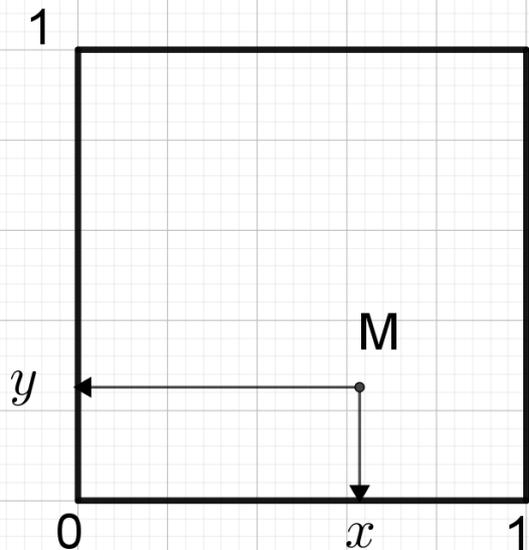


Bijections

Une brève histoire
de l'infini

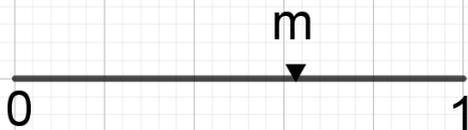
On commence par la fin (ou presque)



$$m = 0,62359871002365\dots$$

$$x = 0,6397026\dots$$

$$y = 0,2581035\dots$$



“ Je le vois, mais
je ne le crois pas.”
G. Cantor (1877)

Au début, l'infini était interdit

Les Anciens : Aristote distingue l'infini potentiel de l'infini en acte. Zénon d'Elée rejette la « division à l'infini ».

Des théologiens reprennent cette distinction, qui s'accorde avec la proclamation que seul le dieu unique peut être « infini »

... et le problème de l'éternité du monde ?

Un infini mathématique?

Euclide : Le point est ce dont la partie est nulle (*définition*)

Conduire une droite d'un point quelconque à un autre point quelconque.

Prolonger indéfiniment une droite finie (*demandes*)

Le tout est plus grand que la partie (*Notions premières*)

Remarques :

La droite n'est pas considérée comme *constituée de points*, a fortiori elle n'est pas un *ensemble infini de points*, comme on dira plus tard.

Une droite est une ligne continue, formée d'une infinité de points. (superprof.fr)

Peut-être ferait-on mieux de ne point définir la ligne *courbe* ni la ligne droite, par la difficulté et peut-être l'impossibilité de réduire ces mots à une idée plus élémentaire que celle qu'ils présentent d'eux-mêmes.

(D'Alembert)

Quelques percées dans l'infini

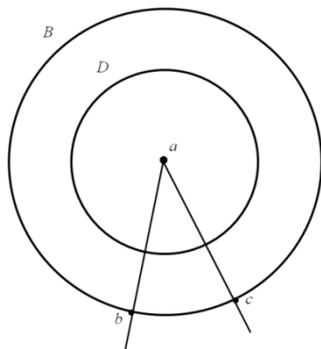


Robert Grosseteste
1175 - 1253

« Il y a des infinis
plus petits que
d'autres »



John Duns Scot
1266 - 1308



Nicole Oresme
1320 - 1382

La série
harmonique
diverge



Galilée
1564 - 1642

Il y a exactement
autant de carrés
parfaits que
d'entiers

Les infiniment petits s'y mettent

John Wallis
(1616 –
1703)



Isaac
Newton
(1643 –
1727)

G. W.
Leibniz
(1646 –
1716)



Leonhard
Euler
(1707 – 1783)

SUppono in limine (juxtâ Bonaventuræ
Cavallerii *Geometriam Indivisibilium*)
Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis
parallelis conflari: Vel potius (quod e-
go malle) ex infinitis Prallelogram-
mis æquè altis; quorum quidem singulo-
rum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars
infinite parva; (esto enim ∞ nota numeri infini-
ti); adeoq; omnium simul altitudo æqualis altitudi-
ni figuræ.



La droite fourre-tout

La commensurabilité, paradigme grec : les nombres sont des rapports (entiers ou rapports d'entiers)

Mais il existe des **irrationnels** ($\sqrt{2}$)

On peut placer « les nombres » **sur une droite**

Les négatifs, les irrationnels, les solutions d'équations polynômiales, et même les *transcendants* **sont des nombres**, ils ont leur place sur la droite aussi.

La cardinalité

Les **nombre entiers** retrouvent leur destination originelle (*adjectifs numéraux cardinaux*)

Mais ils s'effacent devant la propriété **avoir même cardinal**, qui s'applique à deux **ensembles** qui peuvent être mis en **correspondance** terme à terme.

L'équipotence concerne aussi les ensembles **infinis**.

Quelques correspondances

Entre \mathbb{N} et certaines
de ses parties strictes

$$n \mapsto 2n$$

$$n \mapsto n^2$$

L'hôtel de Hilbert

Entre \mathbb{N} et des ensembles
dont il est une partie stricte

Autres ensembles
dénombrables : \mathbb{Q} ,
l'ensemble des nombres
algébriques

Le procédé diagonal

0	0, 35678016901...
1	0, 56821349721...
2	0, 23598712450...
3	0, 69888742102...
4	0, 54123002897...
5	0, 12365489711...
...	

Le même procédé permet de montrer que \mathbf{N} n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(\mathbf{N})$... *exercice*

Supposons qu'il existe une correspondance terme à terme qui associe à tout nombre réel un entier. Le tableau ci-contre montre ce qui pourrait être pour les premiers entiers.

Considérons un nombre réel dont la première décimale n'est pas 3, la seconde n'est pas 6, etc. Ce nombre ne peut donc être associé ni à 0, ni à 1, etc. Aucun entier ne lui correspond. \mathbf{N} et \mathbf{R} ne sont pas équipotents.

A voir aussi : il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$...

Ce qui n'a pas été dit...

Comment est fabriqué l'ensemble des nombres réels et pourquoi on peut associer à chacun une suite de décimales (et réciproquement).

La **théorie naïve des ensembles** (une *propriété définit* un ensemble) doit être pour le moins **consolidée**.

L'hypothèse du continu

Le calcul sur les **nombre ordinaux**...

Le terme **bijection**.

Ensembles infinis : amis, ennemis



Leopold Kronecker
1823 – 1891
« Die Ganze Zahl
schuf der liebe Gott,
alles Übrige ist
Menschenwerk »



Henri Poincaré
1854 – 1912
« La théorie des
ensembles [infinis]
est une maladie dont
les générations
futures se
remettront »



Bertrand Russell
1872 – 1970
« La résolution des
problèmes [autour de]
l'infini mathématique
constitue la plus
grande réussite dont
notre époque puisse
s'enorgueillir »



Georg Cantor (1845 – 1918)
« Dieu tout-puissant a voulu que
je parvienne aux ouvertures les
plus extraordinaires en théorie
des ensembles et en théorie des
nombres ; ou plutôt j'ai trouvé ce
qui m'a troublé pendant des
années et que j'ai si longtemps
cherché »

« L'œuvre de Cantor est le produit le plus étonnant de la pensée mathématique et une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine de l'intelligence pure »

David Hilbert