Olympiades 2020
Zone Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde
Éléments de solution

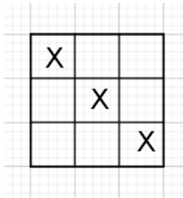
Exercice1
Bataille navales

Partie A : Étude de trois cas particuliers

1. Cas où $n = 3$

a. Le bateau peut occuper 6 positions, 3 verticalement et 3 horizontalement.

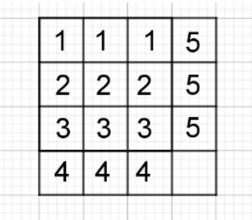
b. Avec trois croix sur la diagonale, les 6 positions possibles du bateau sont touchées, on peut placer ces croix sur l'autre diagonale avec le même effet.



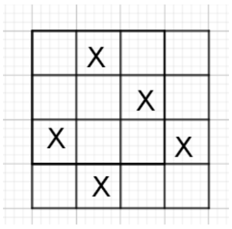
c. En deux tirs, au moins une ligne et au moins une colonne sont épargnées.

d. Conclusion 3 est bien le nombre minimum de tirs pour toucher à coup sûr.

2. Cas où $n = 4$

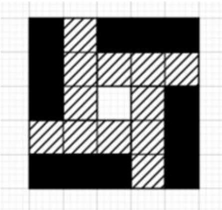


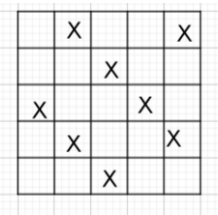
a. On place par exemple 4 bateaux sur les quatre premières lignes et les trois premières colonnes et le cinquième sur la quatrième colonne (on peut échanger le rôle des lignes et des colonnes et les numéros des bateaux. On en déduit que le nombre minimum de tirs est supérieur ou égal à 5.

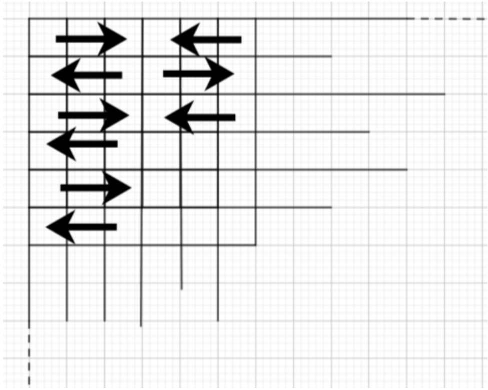


b. Sur la figure ci-contre à droite, aucun ligne ni aucune colonne ne contiennent plus de deux cases blanches contiguës. Le tir est donc optimal. $\mathcal{J}(4) = 5$.

3. La figure ci-dessous montre comment placer 8 bateaux dans la grille ; ils occupent 24 cases, il n'est pas possible d'en placer davantage. Le schéma de droite montre comment ajuster 8 tirs. On a don $\mathcal{J}(5) = 8$.

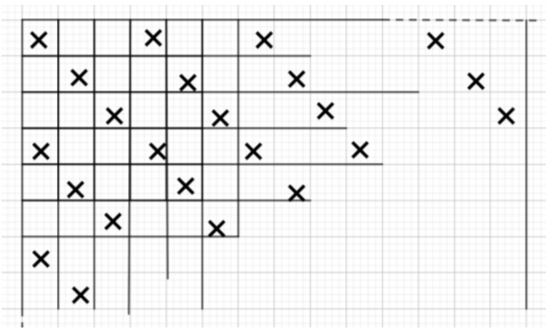






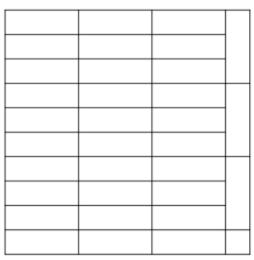
Partie B : Cas général

1. ***a.*** Le schéma de droite montre comment disposer $3p^2$ bateaux 3x1 sur un damier $3p \times 3p$. Les bateaux occupent les trois premières colonnes, puis les trois suivantes, etc. Donc $\mathcal{J}(3p) \geq 3p^2$.



b. On place les croix en diagonale, laissant sur chaque ligne et sur chaque colonne 2 cases indemnes entre deux cases touchées. Il y a donc p cases visées par ligne, donc $3p^2$cases visées.

2. Cas où $n = 3p + 1$



a. La disposition ci-contre (« piles » de bateaux en p colonnes de $3p + 1$ unités, une dernière colonne d largeur 1 occupée par p bateaux) ne laisse qu'une case libre, c'est le moins qu'on pouvait faire. Au total, on a placé $3p^2 + 2p$ bateaux (c'est aussi ce que fournit la division euclidienne de $9p^2 + 6p + 1$ par 3).

b. On déduit de ce qui précède que $\mathcal{J}(3p + 1) \geq 3p^2 + 2p$ et la méthode des tirs selon des diagonales, qui laissent au plus deux cases indemnes entre deux cases touchées, horizontalement ou verticalement, fonctionne : il y a $p + 1$ lignes comportant $p + 1$ cases à viser, les $2p$ autres en comportant p. Au total $(p + 1)^2 + 2p^2 = 3p^2 + 2p + 1$.

c. Donc $\mathcal{J}(3p+1) = 3p^2 + 2p + 1$.
3. ***a.*** La division euclidienne de $(3p+2)^2$ par 3 s'écrit : $9p^2 + 12p + 4 = 3 \times (3p^2 + 4p + 1) + 1$, la division euclidienne de $(3p+1)^2$ s'écrit $9p^2 + 6p + 1 = 3 \times (3p^2 + 2p) + 1$ et $9p^2$ est un multiple de $3p$.
Ces quotients entiers répondent exactement à la définition donnée dans l'énoncé.

b. Ni $6\ 060$, ni $6\ 061$ ne sont des carrés d'entiers. La réponse est donc non.