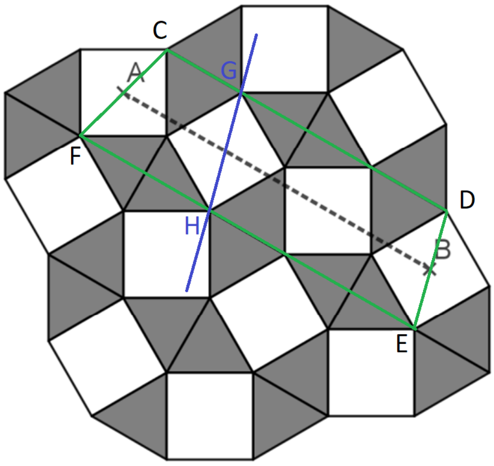
Exercice 1.

PREMIERE SOLUTION



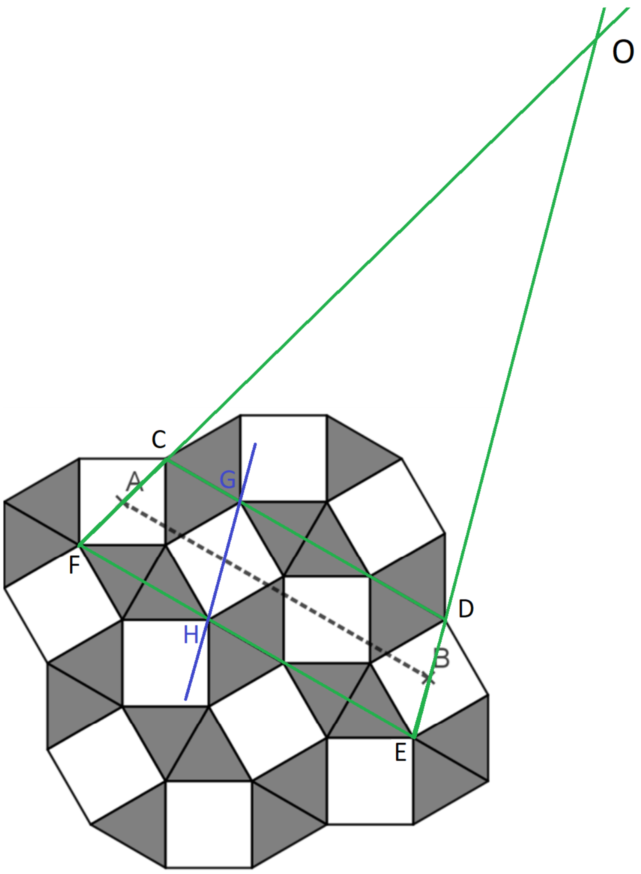
Etape 1 : montrer que le quadrilatère CDEF est un **trapèze**.

(CD) et (FE) sont coupées par une sécante (GH) tel que :

$$\begin{cases} \widehat{CGH} = 60° + 45° = 105° \\ \widehat{GHE} = 45° + 60° = 105° \end{cases}$$

Ces angles alternes-internes sont égaux, on en déduit que (CD) // (FE). CDEF est un trapèze.

Etape 2 : Montrer que (AB) // (CD) et (AB) // (FE).



On appelle O le point d'intersection de (FA) et (EB).

Sachant que (CD) // (FE), le théorème de Thalès nous donne :

$$\frac{FO}{CO} = \frac{EO}{DO}$$

$$\frac{FC + CO}{CO} = \frac{ED + DO}{DO}$$

$$\frac{2CA}{CO} + 1 = \frac{2BD}{DO} + 1$$

$$\frac{CA}{CO} = \frac{BD}{DO}$$

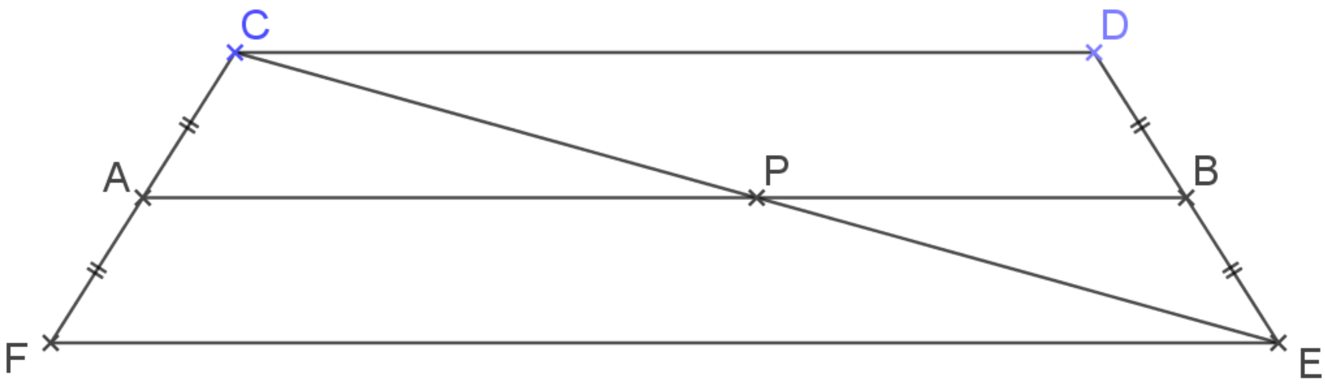
$$\frac{CA}{CO} + 1 = \frac{BD}{DO} + 1$$

$$\frac{CA + CO}{CO} = \frac{BD + DO}{DO}$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (AB) // (CD). On en déduit (AB) // (FE) également.

Etape 3 : montrer que $AB = \dfrac{CD + FE}{2}$



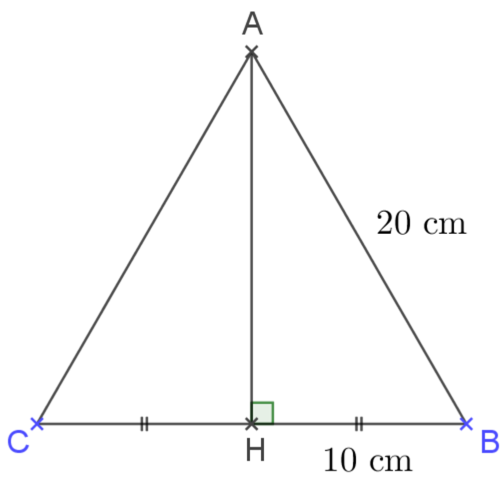
Dans le triangle CFE, (AP) // (FE) et A milieu de [FC]. Selon le théorème des milieux, on a $AP = \dfrac{FE}{2}$.

Dans le triangle CDE, (PB) // (CD) et B milieu de [DE]. Selon le théorème des milieux, on a $PB = \dfrac{CD}{2}$.

On a alors : $AB = AP + PB = \dfrac{FE + CD}{2}$

Etape 4 : Calculer les longueurs CD et FE.

Longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral :



ABC étant équilatéral, (AH) est la médiatrice de BC.

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle AHB rectangle en H on obtient :

$AH^2 = AB^2 - HB^2$

$AH^2 = 400 - 100 = 300$

$AH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

$CD = 20 + 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 20 = 40 + 20\sqrt{3}$

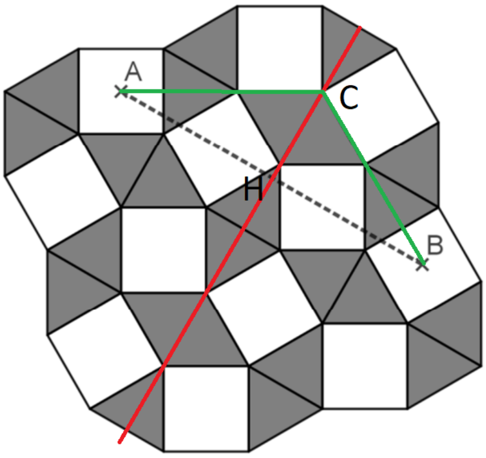
$EF = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 20 + 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 20 + 40\sqrt{3}$

Etape 5 : Calculer AB.

$$AB = \frac{FE + CD}{2} = \frac{40 + 20\sqrt{3} + 20 + 40\sqrt{3}}{2} = \frac{60 + 60\sqrt{3}}{2}$$

$AB = 30 + 30\sqrt{3}$ cm

DEUXIEME SOLUTION



(CH) est un axe de symétrie pour la figure.

B étant le symétrique de A par rapport à (CH), (CH) est la médiatrice de [AB]

On en déduit que $AH = HB$ et AHC rectangle en H.

On a également : $\widehat{ACH} = 30°$

$$\sin\left(\widehat{ACH}\right) = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = \sin\left(\widehat{ACH}\right) \times AC.$$

$AC = 10 + 10\sqrt{3} + 20 = 30 + 10\sqrt{3}$

$$AH = \sin(60°) \times \left(30 + 10\sqrt{3}\right)$$

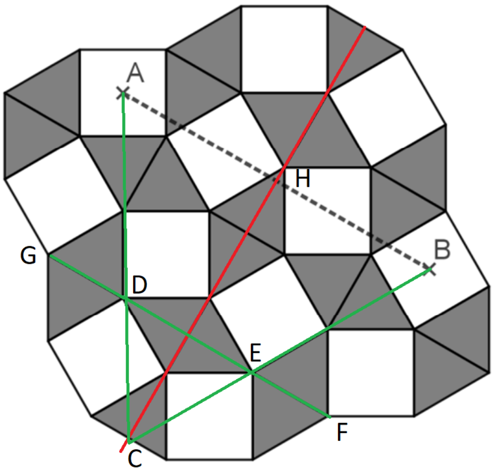
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(30 + 10\sqrt{3}\right)$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 30 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{30\sqrt{3} + 30}{2}$$

$$AB = 2 \times AH = 2 \times \frac{30\sqrt{3} + 30}{2} = 30\sqrt{3} + 30 \text{ cm}$$

TROISIEME SOLUTION



B étant le symétrique de A par rapport à (CH), (CH) est la médiatrice de [AB]

E étant le symétrique de D par rapport à (CH), (CH) est la médiatrice de [DE]

Par la propriété des points de la médiatrice d'un segment, on a CA = CB et CD = CE.

$\widehat{DEC}$ et $\widehat{BEF}$ sont opposés par le sommet donc :

$\widehat{BEF} = \widehat{DEC} = 60°$. De la même façon, $\widehat{ADG} = \widehat{EDG} = 60°$

Tous les angles de DEC sont égaux à 60°, c'est donc un triangle équilatéral. Ses côtés ont pour longueur $DE = 2 \times 10\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$

$\widehat{ACB} = \widehat{DCE} = 60°$ et ABC est isocèle donc ABC est équilatéral.

$AB = AC = AD + DC$

$AB = 10 + 10\sqrt{3} + 20 + 20\sqrt{3}$

$AB = 30 + 30\sqrt{3}$ cm

Exercice 2.

On cherche le plus petit entier a tel que a soit **multiple** de $75 - |x|$ avec 11 valeurs de x possibles. On note $\{x_1; x_2; x_3; ...; x_{11}\}$ les 11 valeurs de x ordonnées de la plus petite à la plus grande.

En vertu de la définition de la notation $|x|$, on constate que si x_1 convient, alors $-x_1$ convient aussi car :

$75 - |-x_1| = 75 - |x_1|$

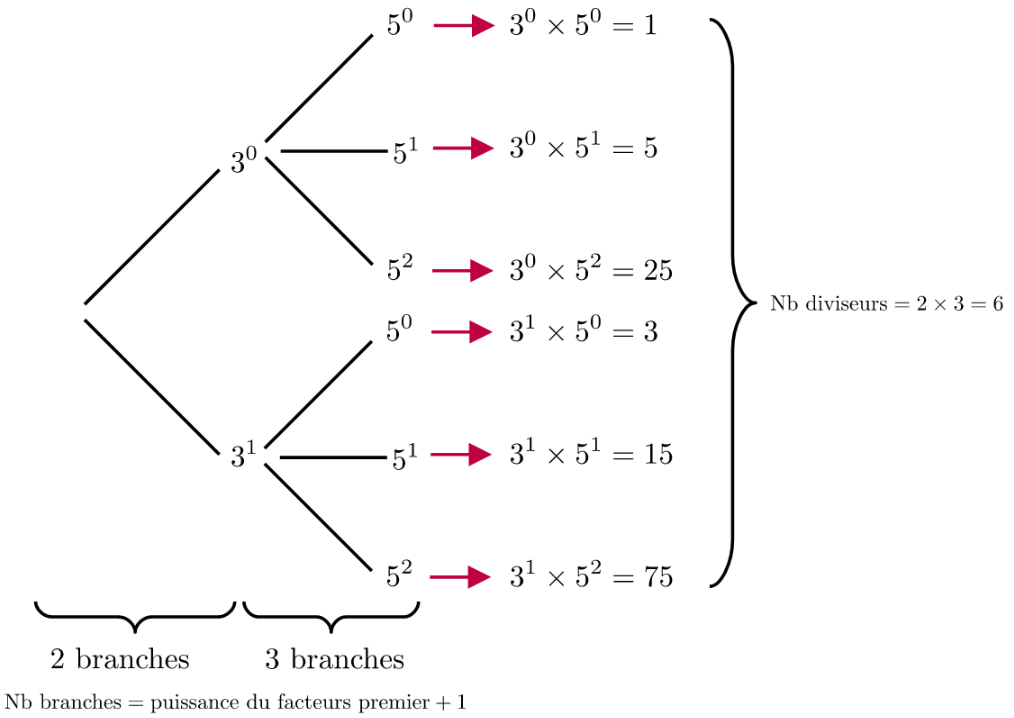
On peut donc en déduire que :
$x_{11} = -x_1$; $x_{10} = -x_2$; $x_9 = -x_3$; $x_8 = -x_4$; $x_7 = -x_5$

Ce qui fait 10 valeurs, la onzième ne pouvant être que $x_6 = 0$. (sinon l'opposé de x_6 conviendrait aussi, et on aurait alors 12 valeurs !)

Pour $x_6 = 0$, on a donc a multiple de $75 - |0| = 75$.

a ne peut pas être inférieur à 75, supposons $a = 75$ et essayons de trouver toutes les valeurs de x tel que $75 - |x|$ divise 75. Pour cela, il faut trouver tous les diviseurs de 75.
Décomposons 75 en produit de facteurs premiers : $75 = 3^1 \times 5^2$.

Pour savoir combien de diviseurs possède 75, on peut représenter la situation sous forme d'arbre :



Les valeurs de x qui conviennent sont donc :

$75 - x = 75 \Rightarrow x = 0$

$75 - x = 25 \Rightarrow x = 50$ et $x = -50$

$75 - x = 15 \Rightarrow x = 60$ et $x = -60$

$75 - x = 5 \Rightarrow x = 70$ et $x = -70$

$75 - x = 3 \Rightarrow x = 72$ et $x = -72$

$75 - x = 1 \Rightarrow x = 74$ et $x = -74$

Il ne peut pas y avoir d'autres valeurs de x qui conviennent puisqu'il n'y a pas d'autres diviseurs de 75. On compte 11 valeurs, notre hypothèse $a = 75$ est donc vérifiée.

Exercice 3.

Pour la première question, il suffit de considérer les 12 sommets de la croix pour constater qu'ils sont :

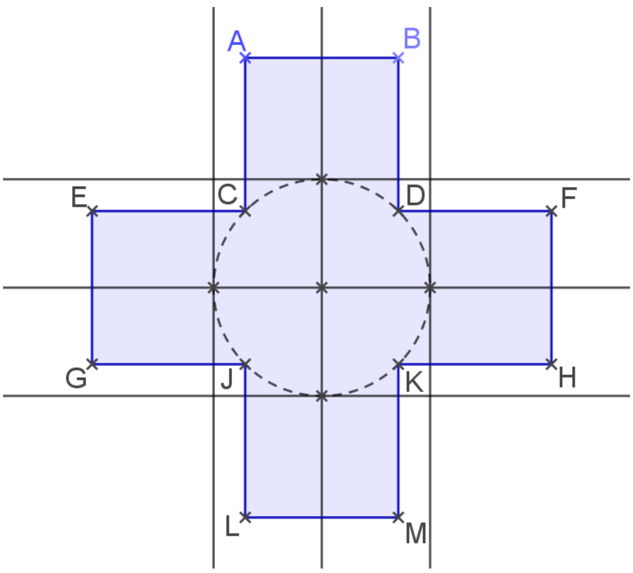
- à une distance de 1 des points dont ils partagent un des côtés de la croix.
- à une distance de $\sqrt{2}$ du sommet en diagonal dans un même carré.
- à une distance supérieur à 1 pour les points des autres carrés (un segment de deux points qui ne sont pas dans le même carré contient une partie inscrite dans le premier carré, donc sa longueur sera plus grande que 1).

Il existe donc bien 12 points de $\mathcal{C}$ dont les distances deux à deux sont toutes supérieures ou égales à 1.

A fortiori, il en existe 11, 10, 9 ...

Pour la question 2, nous allons découper la croix en 12 zones de diamètre* inférieur à 1. L'intérêt d'un tel découpage est qu'avec 12 zones et 13 points, il y aura au moins 2 points qui appartiendront à la même zone, et qui seront par conséquent à une distance inférieure à 1 l'un de l'autre.

Plusieurs découpages sont possibles, nous proposons le suivant :



On construit les médiatrices de [AB] et de [EG].

On construit le cercle de centre l'intersection des médiatrices passant par un coin de la croix.

On construit le carré tel que le cercle précédent soit inscrit dans ce carré.

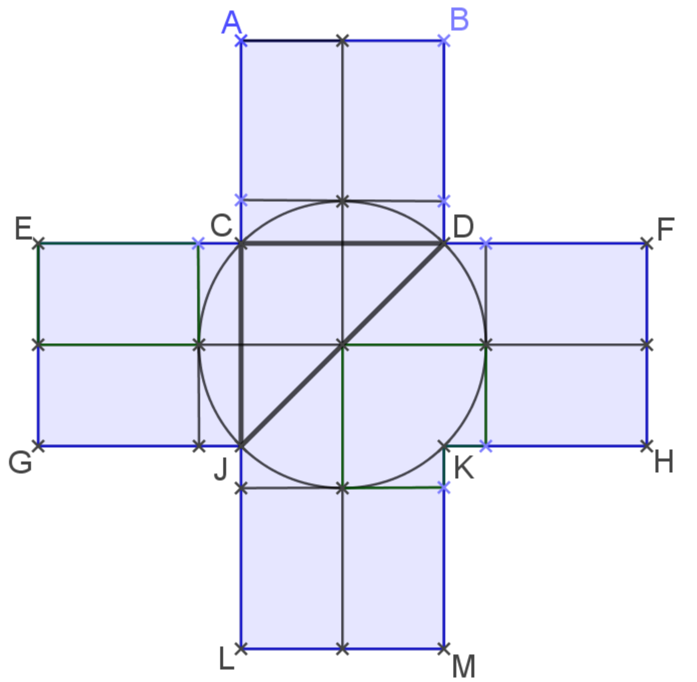
Ce découpage permet d'obtenir 12 zones : 8 rectangles et 4 hexagones identiques.

Calculons les diamètres* de ces zones.

* Diamètre = Distance la plus grande possible entre deux points d'une figure.

Hexagone :

Calculons la longueur des côtés du carré dont est extrait l'hexagone.



Le triangle CDJ est rectangle et isocèle en C. $CD = CJ = 1$.

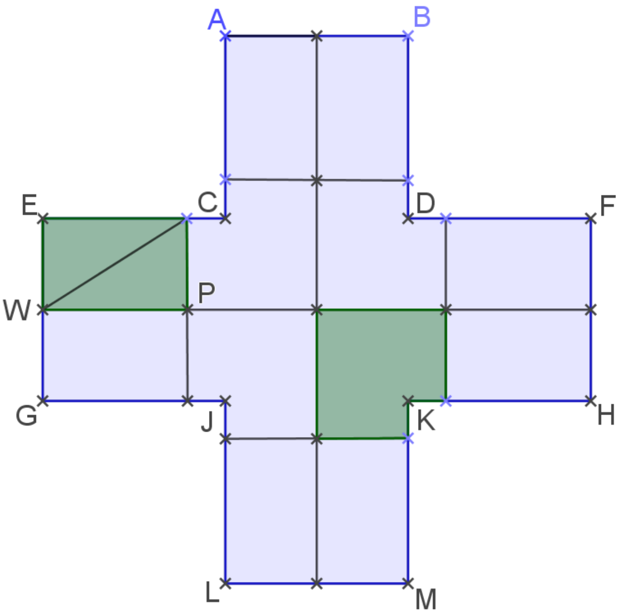
En appliquant le théorème de Pythagore, on a $JD = \sqrt{2}$. [JD] est un diamètre du cercle, la longueur d'un rayon est donc de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Les hexagones sont donc à l'intérieur de carrés de côté $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La plus grande distance possible dans un tel carré et la longueur d'une diagonale qui est de $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$. Il n'y a qu'un seul cas pour lequel deux points de l'hexagone sont à une distance de 1 : ils sont diamétralement opposés. Nous l'éliminerons après avoir étudié les zones rectangulaires.

Rectangle

La plus grande distance possible dans un rectangle est la longueur de ses diagonales.



Dans le rectangle ECPW, $CP = \dfrac{1}{2}$ et $WP = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$

Par appliquaction du théorème de Pythagore au triangle CPW rectangle en P on a :

$$CW^2 = CP^2 + W2$$

$$CW^2 = \frac{1}{4} + \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}{4}$$

$$CW^2 = \frac{1}{4} + \frac{9-6\sqrt{2}+2}{4}$$

$$CW^2 = \frac{12-6\sqrt{2}}{4}$$

$$CW^2 = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \simeq 0,87 \Rightarrow CW < 1$$

On ne peut donc pas placer deux points dans une zone rectangulaire sans qu'ils soient à une distance inférieure à 1 l'un de l'autre.

Il reste désormais à éliminer le cas limite des zones hexagonales dans lequel deux points seraient à une distance de 1. Dans ce cas, ils appartiendraient aussi à une zone rectangulaire et donc seraient à une distance inférieure à 1 d'autres points appartenant à celle-ci.

Il n'est donc pas possible de placer 13 points dans $\mathcal{C}$ sans qu'au moins deux d'entre eux soient à une distance inférieure à 1.