MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Amériques-Antilles-Guyane

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

k-couples

Dans cet exercice, on s'intéresse aux couples d'entiers naturels non nuls dont le produit des deux composantes est un multiple de leur somme. Pour k entier naturel non nul, on appelle k-couple tout couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls tel que $x \leq y$ et $xy = k(x+y)$.
Par exemple $(12\,;60)$ est un 10-couple puisque $12 \leq 60$ et $12 \times 60 = 720 = 10 \times (12+60)$.

Partie A : questions préliminaires.
1. Justifier que $(6\,;30)$ et $(10\,;10)$ sont des 5-couples, mais que $(30\,;6)$ et $(5\,;25)$ n'en sont pas.
2. Pour quelle valeur de l'entier naturel non nul k le couple $(8\,;56)$ est-il un k-couple ?
3. Existe-t-il un entier naturel non nul k tel que $(3\,;5)$ soit un k-couple ?
4. Soient m et k deux entiers naturels non nuls. Montrer que si$(x\,;y)$est un k-couple alors$(mx\,;my)$est un mk-couple.

Partie B : recherche de certains k-couples.
1. Montrer que si $(x\,;y)$ est un 1-couple, alors $y-1$ est un diviseur de y.
En déduire qu'il n'existe qu'un seul 1-couple et donner cet unique 1-couple.
2. Soit k un nombre premier et soit $(x\,;y)$ un k-couple. Montrer que $(x-k)(y-k) = k^2$. En déduire le nombre de k-couples.
3. Sachant que $2\,021 = 43 \times 47$, dresser la liste de tous les $2\,021$-couples.

Partie C : k-points et croix.
Le plan est muni d'un repère orthogonal d'origine O.
Pour k entier naturel non nul, on appelle k-point tout point dont le couple de coordonnées est un k-couple.
Dire qu'un point A est une croix signifie qu'il existe un entier naturel non nul k tel que A soit un k-point.
Par exemple le point de coordonnées $(12\,;60)$ est une croix puisque $(12\,;60)$ est un 10-couple.
Le but de cette partie est d'obtenir quelques résultats concernant la répartition des croix dans le plan.
1. Soient x et y deux entiers naturels non nuls avec $x \leq y$.
Recopier et compléter la fonction Python "$croix(x,y)$" qui teste si (x,y) est le couple de coordonnées d'une croix.

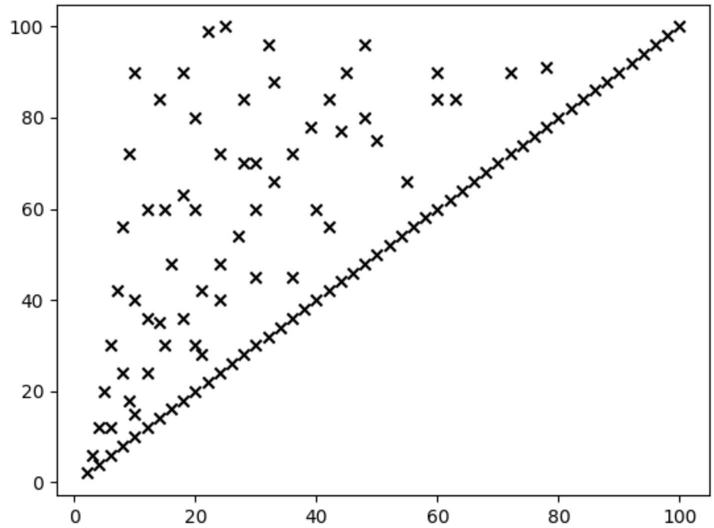
```
def croix(x,y):
    if ..................... : #Compléter ici
        return True
    else:
        return False
```

On rappelle que l'instruction Python a % b renvoie le reste de la division euclidienne de l'entier a par l'entier non nul b.

La fonction Python "$croix(x,y)$" ayant été écrite dans un fichier file.py, le programme Python ci-contre permet d'obtenir le graphique suivant donnant toutes les croix dont l'ordonnée est inférieure à 100.

```
from math import*
from file import croix
import matplotlib.pyplot

xliste=[]
yliste=[]
for y in range(1,101):
    for x in range(1,y+1):
        if croix(x,y):
            xliste.append(x)
            yliste.append(y)
matplotlib.pyplot.scatter(xliste,yliste,c='black',marker='x')
matplotlib.pyplot.show()
```



2. On note D la droite d'équation $y = x$ et P la parabole d'équation $y = x^2 - x$.
Montrer que pour tout entier naturel non nul k, la droite D et la parabole P contiennent chacune un k-point.
3. Monter que si le point A est une croix alors la droite (OA) contient une infinité de croix.
4. Montrer que toute droite passant par O et de coefficient directeur appartenant à $\mathbf{Q} \cap [1\,; +\infty[$ contient une infinité de croix.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Chaînes

Soit m un entier naturel non nul.
On dit que la suite finie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ d'entiers strictement positifs est une *chaîne de longueur* m lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :
(i) $a_1 = 1$
(ii) $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_m$
(iii) Chaque terme est la somme de deux des termes précédents (pas forcément distincts).
Par exemple : $1, 2, 3, 6, 7, 10$ est une chaîne de longueur 6 mais $2, 4, 8, 10$ n'est pas une chaîne puisque cette suite ne commence pas par 1.

1. ***a.*** La suite $1, 2, 4, 5, 10, 20, 21$ est-elle une chaîne ?
b. La suite $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 22$ est-elle une chaîne ?

2. Soit $a_1, a_2, \dots, a_m$ une chaîne de longueur supérieure ou égale à 3.
a. Que vaut a_2? Quelles sont les valeurs possibles de a_3?
b. On donne un entier k inférieur ou égal à m . Prouver que $a_k \leq 2^{k-1}$.

3. Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une chaîne dont le plus grand terme est n.

Dans tout ce qui suite, on note $\ell(n)$la longueur minimale d'une chaîne dont le dernier terme est égal à n.

4. Soit p un entier naturel.
Dans cette question uniquement, n désigne un entier tel que $2^p \leq n < 2^{p+1}$
a. Prouver que $\ell(n) \geq p + 1$.
b. Pour quel(s) n a-t-on $\ell(n) = p + 1$?

5. ***a.*** Montrer que $\ell(12) = 5$.
b. Montrer que $\ell(11) = 6$.
c. Est-il vrai que la longueur $\ell(n)$est d'autant plus grande que n l'est ?

6. ***a.*** Soit p et q deux entiers tels que $0 \leq q < p$. Montrer que $\ell(2^p + 2^q) = p + 2$
b. Soit p, q, r, s des entiers tels que $0 \leq s < r < q < p$. Vérifier que :

$$2^p + 2^q + 2^r + 2^s = 2^s(2^{r-s}(2^{q-r}(2^{p-q} + 1) + 1) + 1)$$

En déduire que $\ell(2^p + 2^q + 2^r + 2^s) \leq p + 4$.
c. Soit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ des entiers naturels tels que $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ \dots < x_k$.
Prouver que $\ell(2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_k}) \leq x_k + k$.
d. Montrer que $\ell(2\ 021) \leq 18$.

7. Prouver que $13 \leq \ell(2\ 021) \leq 15$

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Produits de chiffres

On considère l'ensemble E des entiers naturels dont l'écriture, dans le système décimal, ne comporte que les chiffres 2, 3, 5 et 7.
Par exemple 723 577 et 333 sont des éléments de E mais 234 n'est pas un élément de E.
Pour chaque entier naturel n, on considère le produit $P(n)$ de ses chiffres.

1. Soit l'entier e de E dont l'écriture décimale est 72 233 552 232. Quel est le produit de ses chiffres ?

2. Trouver deux entiers dont un au moins n'est pas élément de E et dont le produit des chiffres est le même que le produit des chiffres de l'entier e.

3. Existe-t-il un plus grand entier naturel, pas nécessairement élément de E, dont le produit des chiffres soit le même que celui de e ?

4. Quel est le plus petit entier naturel, pas nécessairement élément de E, dont le produit des chiffres est le produit des chiffres de e ?