MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique –Orient – Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Exercices académiques

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 5. Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 6.

Exercice 4 (à traiter par tous les candidats)
Entiers n-sommables

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On dit qu'un entier relatif S est n-sommable s'il peut s'écrire sous la forme :

$$S = 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm n$$

Attention, le premier terme de la somme est égal à 1.

Ainsi :

6 est 4-sommable puisque $6 = 1 - 2 + 3 + 4$;

1 est 5-sommable puisque $1 = 1 + 2 - 3 - 4 + 5$;

-3 est 6-sommable puisque $-3 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$.

1. Cas $n = 4$

a. Démontrer que 4 est 4-sommable.

b. Quel est le plus grand entier 4-sommable ?

c. Quel est le plus petit entier 4-sommable ?

d. Déterminer l'ensemble des entiers 4-sommables.

2. Cas $n = 100$

Démontrer que 0 est 100-sommable.

3. On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

a. Démontrer que deux entiers n-sommables ont même parité.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que 2023 soit n-sommable.

c. Démontrer que si S est un entier n-sommable alors $2 - S$ l'est également.

d. Démontrer que si M est le plus grand entier n-sommable et si m est le plus petit entier n-sommable, alors $M - 2$ et $m + 2$ ne sont pas n-sommables.

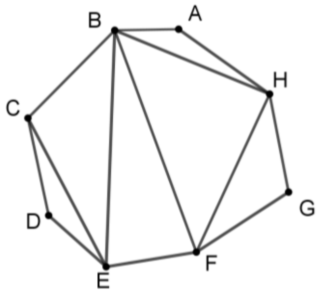
e. Combien y a-t-il d'entiers 100-sommables ?

Exercice 5 (candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

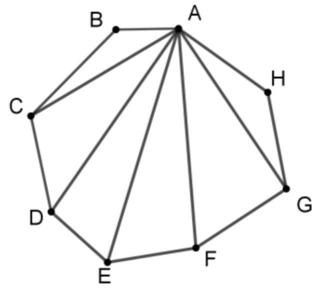
Triangulations et retournements

Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe (c'est-à-dire dont les diagonales sont toutes intérieures au polygone) à n sommets.
Une *triangulation* de $\mathcal{P}$ consiste à diviser $\mathcal{P}$ en régions triangulaires à l'aide de certaines de ses diagonales, ces diagonales n'ayant pas de point commun sauf éventuellement une extrémité.

Ci-contre, on représente deux triangulations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ d'un octogone convexe ABCDEFGH.

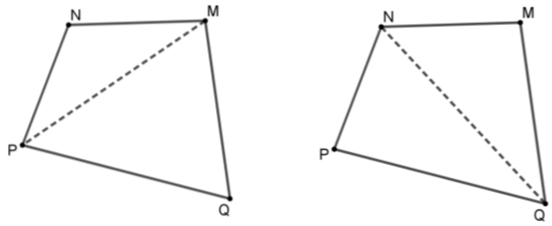


$\mathcal{T}_1$

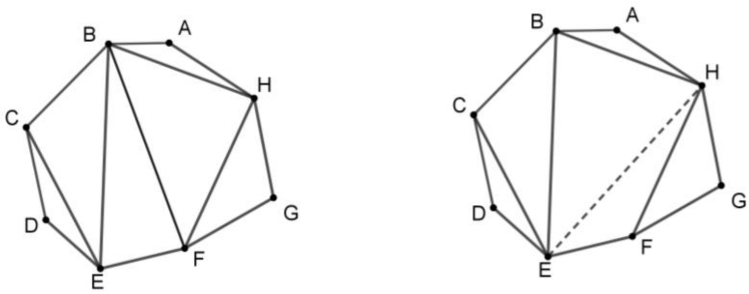


$\mathcal{T}_2$

Une triangulation de $\mathcal{P}$ étant donnée, un *retournement* consiste à choisir un quadrilatère convexe MNPQ formé par deux triangles MNP et MQP et à remplacer la diagonale [MP] par la diagonale [NQ] pour former les triangles NPQ et NMQ, comme sur les figures ci-contre.



Par exemple, ci-contre, on a transformé la triangulation de gauche pour obtenir la triangulation de droite, à l'aide d'un retournement effectué dans le quadrilatère BEFH.



1. Dans cette question uniquement, on considère les deux triangulations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, vues ci-dessus, de l'octogone ABCDEFGH.
   a. Décrire avec précision une suite de retournements qui permette de transformer $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$.
   b. Comment passer de $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{T}_1$ par une suite de retournements ?

Dans tout ce qui suit, on revient au cas général où $\mathcal{P}$ est un polygone convexe à n sommets où $n \geq 4$.

2. ***a.*** Soit A un des sommets de $\mathcal{P}$ et soit $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ la triangulation de $\mathcal{P}$ obtenue en traçant toutes les diagonales issues de A.
   Combien de régions triangulaires sont ainsi formées ?
   En déduire que la somme des mesures des angles intérieurs de $\mathcal{P}$ vaut $(n-2)180°$.
   b. Prouver que toute triangulation de $\mathcal{P}$ est formée de $(n-2)$ triangles.
3. Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux triangulations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ la triangulation de $\mathcal{P}$ obtenue en traçant toutes les diagonales issues de A.
   a. Prouver que l'on peut transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ à l'aide d'un nombre fini de retournements.
   b. En déduire que l'on peut transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'un nombre fini de retournements.
4. Donner un exemple de deux triangulations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{P}$ pour lesquelles il faut au moins $(n-3)$ retournements pour transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$.
5. Prouver que, quelles que soient les triangulations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{P}$, on peut toujours transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'au plus $(2n-7)$ retournements.
6. Dans cette question uniquement, on suppose que $n \geq 13$ et on considère deux triangulations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{P}$.
   a. Prouver que, parmi toutes les diagonales utilisées pour réaliser $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, au moins 4 sont issues d'un même sommet.
   b. Prouver que l'on peut toujours transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'au plus $(2n-10)$ retournements.

Exercice 6 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité)

Numerus clausus

600 étudiants prennent part à un examen de fin de cycle. Les notes sont entières, avec un maximum de 100. La moyenne des notes de l'ensemble des étudiants est 66.

1. *Première situation :*

On suppose qu'il y a 350 étudiants admis et que la moyenne des notes de ces étudiants admis est 80.
Quelle est alors la moyenne des notes des étudiants recalés ?

2. *Seconde situation :*

a. On suppose que la moyenne des notes des étudiants admis est 71 et que moyenne des notes des étudiants recalés est 56.
Combien y a-t-il d'étudiants admis ?

Un problème est signalé au jury : il y a contestation sur l'énoncé d'un exercice noté sur 3 points. Le jury décide d'attribuer la note maximale (3 points) à tous les étudiants pour cet exercice. Chaque étudiant voit donc sa note globale augmenter de 0, 1, 2 ou 3 points.
La moyenne des notes des étudiants admis avant rectification passe à 72.
La moyenne des notes des étudiants recalés avant rectification passe à 58.

b. Quelle est la nouvelle moyenne des notes de l'ensemble des étudiants ?

c. Quelle est la note minimale d'un étudiant ?

d. On suppose que les étudiants admis sont ceux dont la note est supérieure ou égale à 65.
Après rectification des notes, combien peut-il y avoir, au maximum, d'étudiants admis ?