lundi, 19. juillet 2021

Problème 1. Soit $n \geqslant 100$ un entier. Clara écrit les nombres n, $n+1$, $\ldots$, $2n$ sur des cartes distinctes. Elle mélange ensuite les $n+1$ cartes, puis les sépare en deux piles. Montrer qu'au moins l'une des piles contient deux cartes pour lesquelles la somme des nombres est un carré parfait.

Problème 2. Montrer que l'inégalité suivante est vraie

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

pour tous les nombres réels $x_1, \ldots, x_n$.

Problème 3. Soit D un point à l'intérieur d'un triangle acutangle ABC tel que $AB > AC$, vérifiant $\widehat{DAB} = \widehat{CAD}$. Le point E sur le segment $[AC]$ vérifie $\widehat{ADE} = \widehat{BCD}$, le point F sur le segment $[AB]$ vérifie $\widehat{FDA} = \widehat{DBC}$, et le point X sur la droite (AC) vérifie $CX = BX$. Soit O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ADC et EXD respectivement. Montrer que les droites (BC), (EF) et (O_1O_2) sont concourantes.

Language : French

Durée : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 7 points.

mardi, 20. juillet 2021

Problème 4. Soit Γ un cercle de centre I, et $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que chacun des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ soit tangent à Γ. Soit Ω le cercle circonscrit au triangle AIC. L'extension de $[BA]$ au-delà de A coupe Ω en X, et l'extension de $[BC]$ au-delà de C coupe Ω en Z. Les extensions de $[AD]$ et $[CD]$ au-delà de D coupent Ω en Y et T respectivement. Montrer que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Problème 5. Deux écureuils, Bushy et Jumpy, ont ramassé 2021 noix pour l'hiver. Jumpy numérote les noix de 1 à 2021, et creuse 2021 petits trous disposés en cercle sur le sol autour de leur arbre favori. Le matin suivant, Jumpy remarque que Bushy a placé une noix dans chaque trou, mais n'a pas fait attention à leur numérotation. Insatisfait, Jumpy décide de réarranger les noix en effectuant une suite de 2021 modifications. Lors de la k-ième modification, Jumpy échange les deux noix adjacentes à la noix k. Montrer qu'il existe une valeur de k telle que, lors de la k-ième modification, Jumpy a échangé deux noix a et b telles que $a < k < b$.

Problème 6. Soit $m \geqslant 2$ un entier, A un ensemble fini d'entiers (non nécessairement positifs), et $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ des sous-ensembles de A. On suppose que pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$ la somme des éléments de B_k vaut m^k. Montrer que A contient au moins $m/2$ éléments.

Language : French

Durée : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 7 points.