|  |  |
| --- | --- |
| C:\Documents and Settings\pmichalak\Mes documents\Mes images\logo_INRIA.png  **Versailles**  **Lycée Marie Curie**  **Pontoise**  **Lycée Camille Pissarro** | **« Plus je passais de temps à faire des maths, plus j’étais heureuse »**  **En août 2014, Maryam Mirzakhani reçoit la *médaille Fields* décernée par le Congrès international des mathématiciens. Première femme à obtenir cette distinction qui avait honoré jusque-là une soixantaine de mathématiciens.**  **Née en 1977 à Téhéran, elle aurait été attirée vers les mathématiques par l’histoire du calcul de la somme des 100 premiers entiers par le petit Gauss. Suivant un parcours scolaire renforcé, elle obtient deux médailles d’or à l’Olympiade internationale de mathématiques. Elle poursuit ses études aux États-Unis, où sa thèse présentée à Harvard est qualifiée de chef d’œuvre : « La plupart des mathématiciens ne produiront jamais quelque chose d’aussi bon, et elle l’a fait dès sa thèse ». Ses travaux portent sur les *surfaces de Riemann* et, plus tard, sur les *billards mathématiques*.**  **Victime d’un cancer, Maryam Mirzakhani décède à quarante ans, laissant une orpheline. Plusieurs journaux iraniens brisent le tabou en publiant sa photo tête nue.** |

***Stage ouvert aux lycéennes et lycéens de terminale***

***candidat(e)s au Concours général , les 12 et 13 février 2024***

|  |
| --- |
| Une image contenant personne, habits, Visage humain, plein air  Description générée automatiquement*En son honneur, les médias iraniens brisent le tabou* |

La Pépinière académique de mathématique organise depuis 2006, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le siège INRIA de Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le collège François Furet d’Antony, le lycée La Bruyère de Versailles, le lycée Hoche de Versailles, le lycée Marie Curie de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette, qui accueillera au troisième trimestre des lycéennes et lycéens pour une visite et des conférences.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIERE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Nathalie SOARES, Christine WEILL et les inspecteurs retraités Anne ALLARD,Pierre MICHALAK et Évelyne ROUDNEFF,

**Les intervenants professeurs :** Michel ABADIE (Lycée Galilée, GENNEVILLIERS), Richard CROUAU (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Maximilien DENIS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sacha DHENIN (Lycée Franco-allemand, BUC), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (retraitée), Delphine LEROY (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christian MARGUERITE (Lycée Gaspard Monge, SAVIGNY SUR ORGE), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d’Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE, Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), François REGUS (Lycée Viollet le Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC), Martine SALMON (Retraitée)

**… Et les professeurs accompagnant leurs élèves :** Nadia BOUANANE (lycée Pierre Corneille, LA CELLE SAINT CLOUD), SahahCHIKHI (lycée Saint-Exupéry, MANTES LA JOLIE), Gwenaëlle POTHIER (lycée Rosa Parks, Montgeron), Delphine TURBOULT (lycée Alain, LE VÉSINET).

***Emploi du temps***

**Lundi 12 février 2024**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1 Vers** | **Groupe 2 Vers** | **Groupe 3 Vers** | **Pontoise** |
| **10 heures** | **Accueil** | | | |
| **10 h 10** | **Arithmétique** | **Suites numériques** | **Dénombrement**  **Probabilités** | **Arithmétique** |
| **12 h 10** | **12 h 15**  **Repas** | | | |
| **13 heures** | **Géométrie**  **Nombres complexes** | **Fonctions, équations, inéquations** | **Arithmétique** | **13 h 15**  **Suites numériques** |
| **15 h 15** | **Film « Secrets of the surface »** | | | **15 h 15**  **Dénombrements**  **Probabilités** |
| **16 h 20** | **Exposé Paradoxes** | | |

**Mardi 13 février 2024**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1 Vers** | **Groupe 2 Vers** | **Groupe 3 Vers** | **Pontoise** |
| **10 heures** | **Suites numériques** | **Dénombrement**  **Probabilités** | **Géométrie**  **Nombres complexes** | **Géométrie**  **Nombres complexes** |
| **12 heures** | **Repas** | | | |
| **12 h 50** | **Fonctions, équations, inéquations** | **Arithmétique** | **Suites**  **numériques** | **Fonctions, équations, inéquations** |
| **15 heures** | **Dénombrement,**  **Probabilités** | **Géométrie,**  **Nombres complexes** | **Fonctions, équations, inéquations** | **14 h 50**  **Film**  **Secrets of the surface**  **Exposé Paradoxes** |

**Arithmétique**

**Exercice 1 – OIM 1992**

Déterminer tous les entiers et tels que et est un diviseur de .

On pose .

Alors

Et le problème posé revient à déterminer les entiers tels que et, puisque divise , divise c’est-à-dire il existe un entier naturel non nul tel que .

Montrons déjà que .

Soit, pour strictement positifs, . Si on fixe et , la fonction qui à tout réel strictement positif associe le réel . La fonction est dérivable sur et qui est un nombre strictement négatif. La fonction est donc strictement décroissante sur et on obtiendrait de même une fonction décroissante sur en fixant et ou et .

On en déduit, puisqu’on doit avoir que .

Or et donc .

Montrons maintenant que  : et donc puisqu’on veut obtenir un entier strictement positif.

Si et , alors l’équation s’écrit soit . Cette équation n’a pas de solution dans **N**\*.

Si et , alors l’équation s’écrit soit

soit . Comme , la seule solution est et soit et .

, comme, et , et l’équation s’écrit de même et la seule solution est et soit et .

Au final les solutions sont et .

**Exercice 2**

Soit un entier naturel non nul et différent de 1 et ses diviseurs positifs ().

On note .

Montrer que et déterminer les valeurs de pour lesquelles divise .

Quelques remarques préliminaires :

* et .
* est le plus petit nombre premier diviseur de et .
* Si est un diviseur de , alors est un diviseur de .
* Pour tout ,

On peut ainsi écrire :

Or, pour tout . Comme les sont des entiers strictement positifs distincts et rangés dans l’ordre croissant, donc puisque

Au final, puisque , .

Si est premier, alors et donc divise .

Si n’est pas premier, alors . Or et donc et soit, puisque tous les nombres sont strictement positifs, . Si divise , alors divise aussi et on en déduit que  *.*

Ceci est impossible puisque est le plus petit nombre premier diviseur de donc le plus petit nombre premier diviseur de .

Au final, divise si et seulement si est un nombre premier.

**Exercice 3 – Division euclidienne**

Déterminer, pour tout entier naturel non nul le reste de la division euclidienne par de l’entier :

.

Montrons déjà que si est un entier impair et et deux entiers naturels non nuls quelconques, alors est un multiple de .

Comme est impair, il existe un entier tel que et .

Or, pour tous réels et tout entier m, .

On applique cette propriété à , et pour pouvoir affirmer que est un multiple de .

On peut alors écrire

Chaque somme entre parenthèses s’écrit où et est donc un multiple de .

On en déduit qu’il existe un entier tel que et donc, comme , le reste de la division euclidienne de par est 2.

**Exercice 4 – Tiré du concours général 2020**

Soit un entier naturel non nul. On dit que est *pointu* lorsque admet *au plus* un diviseur premier ou bien, en notant et les deux plus grands diviseurs premiers de , tels que , l’inégalité est vérifiée.

Par exemple 1 est pointu car il n’admet aucun diviseur premier ; 25 est pointu car il admet un unique diviseur premier (qui est 5) et 147 est pointu car et .

En revanche, 105 n’est pas premier car et .

1. Quelques exemples
2. Le nombre 2 020 est-il pointu ?
3. Quel est le plus petit entier naturel non nul qui ne soit pas pointu ?
4. Quel est le plus petit nombre pointu possédant au moins quatre diviseurs premiers distincts ?
5. Démontrer qu’il existe une infinité de nombres pointus.
6. Démontrer qu’il existe une infinité d’entiers naturels non nuls qui ne sont pas pointus.
7. Établir la liste des nombres pointus entre 1 et 20 inclus. Quelle est la longueur maximale d’une suite de nombres pointus consécutifs entre 1 et 20 ?
8. Peu de grands nombres premiers

On rappelle que si et sont deux entiers naturels tels que , et .

**1.** En considérant le nombre de parties d’un ensemble possédant éléments, démontrer que pour tous entiers naturels et tels que .

**2.** Pour tout entier naturel , on note l’ensemble des nombres premiers tels que et on note le nombre d’éléments de .

* 1. Démontrer que, pour tout nombre premier appartenant à l’ensemble , l’entier est divisible par .
  2. Démontrer que, si sont des entiers naturels non nuls tels que et sont premiers entre eux et divisent , alors divise aussi .
  3. Soit le produit de tous les éléments de . Démontrer que est divisible par .
  4. En déduire que .

1. Quelques exemples
2. et donc le nombre 2 020 est pointu.
3. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5 sont pointus car ils ont au plus un diviseur premier. En revanche 6 a exactement deux diviseurs premiers 2 et 3 et . 6 n’est donc pas pointu et c’est le plus petit entier naturel non pointu.
4. Le plus petit entier pointu admettant au moins quatre facteurs premiers est où est le plus petit nombre premier supérieur au double de 5, soit 11. On obtient .
5. Comme tout nombre premier est pointu (au plus un diviseur premier) et qu’il y a une infinité de nombres premiers, il y a aussi une infinité de nombres pointus.
6. Comme pour 6, tout nombre s’écrivant , où est un entier strictement positif, est pointu

car ).

1. On peut rassembler l’étude des 20 premiers entiers dans le tableau ci-dessous :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Décomposition | 1 | 2 | 3 |  | 5 |  | 7 |  |  |  |
| Pointu | oui | oui | oui | oui | oui | non | oui | oui | oui | oui |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Décomposition | 11 |  | 13 |  |  |  | 17 |  | 19 |  |
| Pointu | oui | non | oui | oui | non | oui | oui | non | oui | oui |

On constate deux suites de longueur 5 constituées de nombres pointus consécutifs compris entre 1 et 20.

1. Peu de grands nombres premiers

**1.**  Le nombre de parties d’un ensemble possédant élément(s) est  ; est le nombre de parties de possédant élément(s) : ainsi .

**2***.****a.*** Soit un nombre premier tel que .

Comme , est un diviseur de et comme et est un nombre premier donc premier avec tous les entiers qui lui sont strictement inférieurs, est premier avec et donc avec .

Or soit . D’après le théorème de Gauss, comme divise mais est premier avec , divise .

1. Soit des entiers naturels non nuls tels que et sont premiers entre eux et divisent . Il existe donc un entier et un entier tels que et . On a donc et divise tout en étant premier avec . D’après le théorème de Gauss, divise c’est-à-dire, il existe un entier tel que . Alors et divise .
2. En appliquant plusieurs fois le résultat de la question précédente, à tous les nombres premiers dans l’ensemble , qui sont premiers entre eux et divisent chacun , leur produit divise aussi .
3. Comme le nombre d’éléments de , l’entier est le produit de nombres premiers distincts tous supérieurs ou égaux à , . D’autre part, divise aussi donc . Or, d’après la question **3.**, donc .

**Exercice 5 – Extrait du concours général 2016**

On note

l’ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d’entiers strictement positifs deux à deux distincts ;

l’ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d’entiers pairs strictement positifs deux à deux distincts ;

l’ensemble des entiers strictement positifs qui peuvent se décomposer en une somme de cubes d’entiers impairs strictement positifs deux à deux distincts.

Par exemple et donc 8 et 190 sont dans , et donc 216 et 1 072 sont dans , et donc 125 et 2 568 sont dans .

L’objectif du problème est de démontrer que tout entier suffisamment grand appartient à .

1. Montrer que 2 016 appartient à .
2. ***a.*** Montrer que pour tout réel , .
   1. Soit un entier supérieur ou égal à 5. Montrer que, pour tout entier ,

On rappelle que si et sont des entiers, la notation signifie que divise.

1. Montrer qu’il existe 288 entiers appartenant à tels que, pour tout dans , et on note le plus grand des entiers .
2. Soit un entier tel que et soit des entiers naturels en progression arithmétique de raison 288. Montrer que tout entier naturel appartenant à , il existe un entier et un entier tels que cet entier soit égal à .
3. On admet que, pour tout réel ,

. (\*)

1. Montrer qu’il existe un entier tel que appartiennent à .
2. Montrer que, pour tout entier , il existe éléments dans en progression arithmétique de raison 288.
3. Soit un entier supérieur ou égal à 5 tel que .
4. Montrer qu’il existe un entier tel que pour tout entier appartenant à , il existe un entier et un entier tels que cet entier soit égal à .
5. Montrer que tout entier supérieur ou égal à appartient à .

(pour tout entier , on pourra examiner le cas des entiers de l’intervalle où

.

1. donc les cubes inférieurs à 2 016 sont ceux inférieurs à .

De plus, , une decomposition possible de dans doit comporter .

Elle ne comporter en plus ni ni car .

On trouve alors .

1. ***a.*** Comme , on démontre, en la dérivant, que la fonction est strictement croissante sur ,

soit et comme la fonction cube est croissante sur **R**, . On a donc bien, puisque les nombres considérés sont positifs, pour tout réel , .

1. Par récurrence sur :

Initialisation : pour ,

Or, d’après la question précédente, on a bien .

Hérédité : soit tel que (\*)

D’après le a., soit .

Donc, d’après (\*),

Soit et l’inégalité est encore vraie au rang .

On a donc bien, pour tout entier ,

1. Pour tout entier naturel , est le cube d’un entier impair. On a donc .

Soit sont alors des éléments de tels que, pour tout .

1. Soit un entier dans . La division euclidienne de par 288 permet d’affirmer qu’il existe un entier tel que c’est-à-dire , égalité qui signifie qu’il existe un entier tel que .

Comme (car est le plus grand des ), .

Comme et , donc .

Au final, il existe un entier et un entier tels que , ce qui s’écrit aussi où et , ce qui était demandé.

1. ***a.***  Pour tout pour tout réel , on a la relation (\*)

, on cherche à appliquer deux fois cette égalité pour construire les nombres et en remplaçant par différentes valeurs pour obtenir des sommes de cubes d’entiers pairs **tous distincts**. En prenant puis , on pose

. L’entier appartient bien à

Et, d’après (\*) appliqué à , , entier appartenant bien à .

Toujours d’après (\*) appliqué à , , qui appartient bien à .

1. On raisonne par récurrence sur .

Initialisation : les nombres et de la question précédente prouve que l’affirmation est vraie pour .

Hérédité : s’il existe éléments dans en progression arithmétique de raison 288.

On généralise la démarche adoptée dans le . Si est un entier tel que les entiers n’interviennent dans aucun des nombres , alors , , …, et sont en progression arithmétique de raison 288 et dans .

On en déduit que, pour tout , pour tout entier , il existe éléments dans en progression arithmétique de raison 288.

1. Soit un entier supérieur ou égal à 5 tel que .
   1. Soit un entier tel que .

D’après le **5b.**, il existe éléments dans en progression arithmétique de raison 288.

D’après la question **4.**, pour tout entier naturel appartenant à , il existe un entier et un entier tels que cet entier soit égal à .

Si on pose alors , comme ,

d’où et pour tout entier appartenant à , il existe un entier et un entier tels que cet entier soit égal à .

* 1. Pour tout entier , et si est un entier dans l’intervalle , alors l’entier appartient à l’intervalle .

Or d’après le 1a. et comme , donc .

D’après la question précédente, comme , il existe un entier et un entier tels que . Ainsi

Or pour tout , les entiers sont des cubes d’entiers impairs distincts deux à deux et distincts des car si , et est le plus grand des . Donc et .

Si est un entier supérieur à , comme , tend vers quand tend vers donc il existe un plus petit entier tel que . Si , d’après la question précédente, . Sinon,

et donc , d’où, d’après ce qui précède, .

Conclusion : tout entier supérieur ou égal à appartient donc bien à .

**Suites numériques**

**Exercice 1 – Multiples cachés de**

Soit la suite définie par , , et, pour tout entier naturel , .

Montrer que pour tout entier naturel non nul , est un multiple de .

s’écrit aussi

Soit soit (\*)

Les trois premiers termes de la suite sont non nuls. Grâce à l’égalité (\*) obtenue ci-dessus, on démontre par récurrence, pour tout , .

L’égalité (\*) s’écrit donc aussi soit encore .

De proche en proche .

On a donc, pour tout , , ce qui permet d’affirmer déjà que est un entier.

De plus donc est un nombre pair et comme donc est le produit de nombres pairs donc un multiple de .

**Exercice 2 – Suite s’annulant**

Soit la suite définie par et, pour tout entier naturel

Déterminer le nombre de valeurs distinctes de telles que .

Si , alors et si, pour un entier , alors donc . Ce raisonnement par récurrence prouve que, pour tout entier naturel et qu’on ne peut avoir .

Si , alors et comme où et , on a . Le raisonnement par récurrence précédent s’applique à nouveau mais à partir du rang 2 et on peut à nouveau affirmer que, pour tout entier naturel , .

Si , alors il existe un réel tel que . Montrons qu’alors, pour tout entier naturel , .

Initialisation : cette égalité est vraie au rang 1 car .

Hérédité : si, pour un entier , alors soit et l’égalité est encore vraie au rang .

On a donc bien, pour tout entier naturel , .

Alors si seulement s’il existe un entier tel que soit .

Comme , . Comme, de plus, la fonction sinus est strictement croissante sur , il y a exactement valeurs de et donc de telles que .

**Exercice 3 – Approximation de**

Soit la suite définie par et, pour tout entier naturel .

Montrer que la suite converge vers et que .

Soit la fonction définie sur par . Alors .

La fonction est dérivable sur et, pour tout réel , . On en déduit que est strictement croissante sur . De plus .

Montrons alors par récurrence que, pour tout entier , .

Initialisation : et et .

Hérédité : si, pour un entier ,

alors, comme est croissante sur , soit et l’encadrement est encore vrai au rang .

Donc, pour tout entier , .

La suite est donc décroissante et minorée par donc convergente.

De plus, comme la fonction est continue sur et, pour tout entier , , la limite de la suite est solution de . Or équivaut à . Comme la suite est minorée par , .

Soit, pour tout entier , .

.

Comme tous les termes de la suite sont strictement positifs, on a (\*) et (\*\*).

On déduit déjà de (\*), par récurrence, que pour tout entier , soit

soit .

Or pour tout entier , et donc En particulier .

De (\*\*), on déduit successivement que , et

c’est-à-dire

**Exercice 4 – Sommes et inégalités**

Soit une suite définie sur et telle que, pour tous entiers non nuls et , .

Montrer que, pour tout entier naturel , . (\*)

On effectue un raisonnement par récurrence.

Initialisation : pour , .

Hérédité : si pour tous les entiers de 1 à , l’inégalité (\*) est vérifiée alors en posant pour tout entier , , on sait que pour tout entier , donc .

Soit .

D’où

Soit .

Soit

On en déduit que

Soit .

Or et, d’après les hypothèses sur lq suite , donc

Et .

On a donc soit

Et l’inégalité (\*) est encore vérifiée au rang .

On a donc bien, pour tout entier naturel , .

**Exercice 5**

L’ensemble des termes des suites et est l’ensemble des entiers compris entre et Chacun de ces nombres n’est utilisé qu’une fois. La suite est décroissante, la suite est croissante.

Combien vaut :  ?

Supposons qu’il existe un rang pour lequel sont tous les deux supérieurs à Dans ce cas,

constituent un ensemble de nombres différents, supérieurs ou égaux à et inférieurs ou égaux à Impossible. On obtiendrait une autre contradiction si on supposait tous deux inférieurs ou égaux à Conclusion : pour tout entier compris entre et , les entiers appartiennent l’un à , l’autre à .

Or, d’après la définition de la valeur absolue, .

En sommant toutes ces différences, on retrouve la somme de tous les entiers compris entre et diminuée de la somme de tous les entiers compris entre et

Finalement

Et

**Exercice 6 – tiré du concours général 2023**

Pour tout entier , on note le plus grand entier naturel tel que soit un entier.

On définit la suite par récurrence, en posant et, pour tout entier :

.

1. Donner la valeur des entiers .
2. Démontrer que, pour tout entier , si est impair et que si est pair.
3. Calculer les huit premiers termes de la suite et verifier que .
4. Démontrer que, pour tout entier , est un nombre rationnel strictement positif, que et que .
5. Démontrer que tout nombre entier strictement positif et que tout inverse d’un entier strictement positif est égal à un terme .
6. On voit rapidement que .
7. Si est un entier impair, alors il est premier avec 2 et .

Si est un entier pair, alors il existe un entier tel que et pour tout entier naturel , donc divise si et seulement si divise d’où soit .

On peut en déduire, par un raisonnement par récurrence, que

1. donc donc

donc donc

donc

donc donc .

1. On effectue un premier raisonnement par récurrence pour montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

Soit  : « pour tout entier tel que ,  et si alors et si alors  »

**Initialisation 1** : , ,

et sont strictement positifs et et

**Hérédité 1 :**

Si pour tout entier tel que ,   et si , et si ,

équivaut à dire qu’il existe un entier avec tel que

On fait maintenant une récurrence finie sur : (on va avancer de 1 pour montrer la non nullité, et la condition sur la tranche de puissance de 2 permet de revenir à la tranche précédente pour avoir les formules) :

Initialisation 2 : pour , car d’après  , on a non nul

Or comme est impair et strictement inférieur à , par hypothèse, de récurrence,

on a .

On en déduit : et donc et est rationnel et vérifie la formule voulue.

Hérédité 2 : Supposons que la non nullité et les formules sont montrées au rang (conforme à ce qu’il faut) :

On a donc

Si impair alors il existe un entier , tel que

et donc

Si pair alors il existe un entier , tel que

et donc

Ceci achève la récurrence finie.

On a donc ainsi prouvé que pour tout entier tel que ,   alors et et donc est encore vraie.

On a donc bien « pour tout entier tel que ,  et si alors et si alors  »

En particulier, tous les termes de la suite sont strictement positifs et un autre raisonnement par récurrence permet alors de montrer que tous les termes de la suite sont des rationnels.

1. Comme pour tout entier , et , on montre par recurrence que, pour tout entire , et donc tout entier strictement positif est égal à et donc un terme de la suite

De plus, s’écrit aussi soit car le plus grand entier i tel que soit un entier est . On a donc et tout inverse d’un entier naturel non nul est un terme de la suite

*Remarque : on montre en fait que tout nombre rationnel strictement positif est un terme de la suite*

**Fonctions – Équations, inéquations et fonctions**

**Exercice 1 – Autour de la partie entière**

On rappelle que la notation désigne la *partie entière* du réel , c’est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à

1. Montrer que l’équation admet une unique solution dans chaque intervalle dont les extrémités sont des entiers strictement positifs consécutifs.
2. Montrer que cette solution est irrationnelle.
3. Plaçons-nous dans l’intervalle et posons où . L’équation initiale s’écrit :

, ou encore : .

Sur l’intervalle la fonction est continue et croissante. Elle réalise une bijection de sur et donc prend une et une seule fois la valeur

1. Reprenons l’équation de départ en posant , et étant premiers entre eux. En appelant la partie entière de il vient , ou encore , d’où vient que divise , contradiction.

Se peut-il qu’un entier soit solution ? L’équation n’a comme solution que 0, qui a été exclu au départ.

**Exercice 2 – Recherche de fonction**

Déterminer la fonction définie sur et vérifiant :

Pour tous les réels et , et . (\*)

Si est une fonction vérifiant (\*) alors :

On sait que soit d’où .

signifie que est dérivable en 0 et que .

Plus généralement, pour tout réel et tout réel non nul,

.

Or et donc .

On en déduit que la fonction est dérivable sur et que, pour tout réel, il existe un réel tel que . Comme , et .

Alors, il existe un réel tel que, pour tout réel, et, comme , et .

Reste à montrer que cette fonction vérifie bien la relation (\*).

**Exercice 3 – Équation fonctionnelle dans**

Déterminer les fonctions , de dans , pour lesquelles :

1. Pour tout couple d’entiers, ;
2. Pour tout entier , , écriture dans laquelle désigne la composée de par elle-même fois.

Si est une fonction vérifiant les deux relations (1) et (2) alors :

et pour tout  , (en effet si alors )

Par un raisonnement par récurrence sur entier naturel non nul, on montre déjà que si est un nombre premier, alors puis, par récurrence sur l’entier , que l’image du produit de entiers est le produit des images de ces entiers pour en déduire que l’image de tout entier est le produit des images des facteurs premiers de sa décomposition, chacun représenté avec son exposant.

De plus, l’orbite de tout entier (c’est-à-dire l’ensemble de ses images successives par ) est un ensemble fini dont le cardinal est un diviseur de En effet, comme , l’orbite de possède au plus éléments. Appelons etc … ( et ) les éléments de l’orbite de et le plus petit entier pour lequel on peut trouver compris entre 0 et tels que Un tel entier existe, puisque lui-même a cette propriété. En prenant un certain nombre de fois l’image de chacun des membres de cette égalité par , on obtient

Montrons que est un diviseur de  :

pour cela, considérons la division euclidienne de par : et . On a

donc avec . La définition de comme plus petit élément pour lequel on peut trouver compris entre 0 et tels que implique que .

Enfin, l’image de tout nombre premier par est lui-même. En effet, l’orbite de contient 1 élément () ou éléments.

Supposons que l’orbite de contienne éléments.

Considérons l’élément de cette orbite, on a et .

Considérons maintenant la décomposition en produit de facteurs premiers de : , les pouvant être égaux.

L’application des propriétés énoncées précédemment conduit à ,

soit encore . Comme les sont tous supérieurs à 2, contient au moins facteurs premiers, implique donc que .

Donc .

Or par choix de , l’orbite de est égale à l’orbite de donc le cardinal de l’orbite de est et le cardinal de l’orbite de divise donc divise , les deux étant premiers, il vient , soit , ce qui contredit l’hypothèse de départ.

Conclusion l’orbite de contient un seul élément donc .

Et par application des propriétés énoncées précédemment, pour tout entier naturel non nul, .

On vérifie aisément que la fonction définie par, pour tout entier naturel non nul, , est bien solution du problème.

**Exercice 4 -**

Montrer que pour tous nombres réels strictement positifs et deux à deux distincts :

. (\*)

On pose , et .

Alors, d’une part, et de même .

D’autre part, et, de même, , .

(\*) s’écrit donc

Soit c’est-à-dire .

Or c’est-à-dire

Soit c’est-à-dire

Soit, après réduction au même dénominateur . (\*\*)

Or

(\*) équivaut donc à

Soit, d’après (\*\*),

Soit c’est-à-dire ce qui est toujours vrai.

**Exercice 5 – Une fonction toute simple**

Déterminer toutes les fonctions , de dans , vérifiant :

et pour tous entiers naturels et , . (\*)

Si est une fonction vérifiant (\*) alors :

En posant (\*) donne soit ou .

Comme la fonction est à valeurs dans la seule possibilité est.

En posant maintenant , on en déduit que pour tout entier naturel , . (\*\*)

Alors, en réutilisant (\*) ou (\*\*) plusieurs fois, montrons que pour tout entier compris entre 1 et 10,  :

Pour , d’où, comme , .

Pour ,

Pour ,

Pour ,

Pour ,

De plus, et d’où et, comme ,

Pour ,

Pour ,

De plus, donc d’où et, comme , .

Enfin, mais aussi

Donc et, comme , .

Pour tout entier , il existe un unique couple d’entiers naturels tels que et

On va démontrer par récurrence sur que pour tout entier la proposition : « pour tout entier ,  » est vraie.

Initialisation : l’égalité est vraie pour d’après les calculs précédents

Hérédité : si la proposition est vraie pour tout entier inférieur ou égal à c’est-à-dire que pour tout entier alors montrons que la proposition est encore vraie pour l’entier c’est-à-dire .

Pour cela, on va chercher à adopter des démarches analogues à celles utilisées pour les premières valeurs de en cherchant à exprimer les carrés en fonction de carrés plus petits, en partant du fait que et donc en cherchant une égalité du type :

.

Pour , on obtient et et on constate que et vérifient la première égalité et qu’alors convient donc et comme, sont des entiers plus petits que ,

Soit soit c’est-à-dire et comme , .

On procède de même pour obtenir les égalités :

,

,

Et pour démontrer que

Ce qui permet d’affirmer que si l’égalité est vraie pour tout entier inférieur ou égal à un entier , alors montrons que l’égalité est encore vraie pour les entiers .

On en déduit que, pour tout entier , .

On vérifie aisément que la fonction définie par, pour tout entier naturel non nul, , est bien solution du problème.

**Exercice 6 – Inégalité de Cauchy-Schwarz**

1. Soit des nombres réels.

Montrer que et qu’on a égalité si et seulement si il existe un réel tel que pour tout , .

1. Soit des nombres réels strictement positifs tels que .

Montrer que .

1. Soit la fonction qui, à tout réel associe le nombre . Pour tout réel , .

Or .

On pose , et .

Si tous les sont nuls, et l’inégalité est vérifiée.

Sinon, et est un trinôme du second degré (en ) qui est toujours positif si et seulement si son discriminant est négatif ou nul, c’est-à-dire soit .

L’inégalité est une inégalité si et seulement si :

1. Soit tous les sont nuls et tous les sont nuls et il existe bien un réel tel que pour tout , .
2. Soit le discriminant du trinôme est nul et l’équation admet une unique solution , c’est-à-dire pour tout , . Il ne reste plus qu’à poser .
3. Comme , .

De même, et .

L’inégalité à démontrer s’écrit donc

Soit . (\*)

Or

Comme sont strictement positifs et tels que , et l’inégalité (\*) équivaut à

Soit c’est-à-dire soit encore .

En posant, puisque sont strictement positifs, , et d’une part et et , l’inégalité de Cauchy-Schwarz permet d’écrire

Soit .

**Exercice 7 -**

Déterminer toutes les fonctions de dans tels que :

Pour tous réels et , . (\*)

Si est une fonction vérifiant (\*) alors :

Montrons que pour tout , .

Pour cela, s’il existe un réel tel que alors si on pose alors et

. Or .

On a donc ce qui signifie puisque est à valeurs dans , et on aboutit à une contradiction.

On en déduit que pour tous réels et , , ce qui signifie que la fonction est décroissante sur .

* S’il existe un réel tel que , alors pour tout réel , car est décroissante sur . On a donc à la fois et donc et pour tout entier naturel non nul ,

et un raisonnement par récurrence sur conduit à pour tout entier naturel non nul , . Comme, pour tout réel strictement positif , il existe un entier naturel non nul tel que

, et est la fonction constante égale à 1.

* Si, pour tout alors comme pour tout , ,

La fonction est donc strictement décroissante et injective.

Pour tous réels et , (\*) s’écrit

soit .

En posant , cette égalité s’écrit soit, puisque ,

. Comme est injective, on en tire

Soit soit .

Il existe donc un réel strictement positif (car tel que pour tout ,

Remarque : correspond au cas constante égale à 1.

Réciproquement si pour tout , où .

et est bien solution du problème.

**Géométrie – Nombres complexes**

**Exercice 1 – Alignement et tangente**

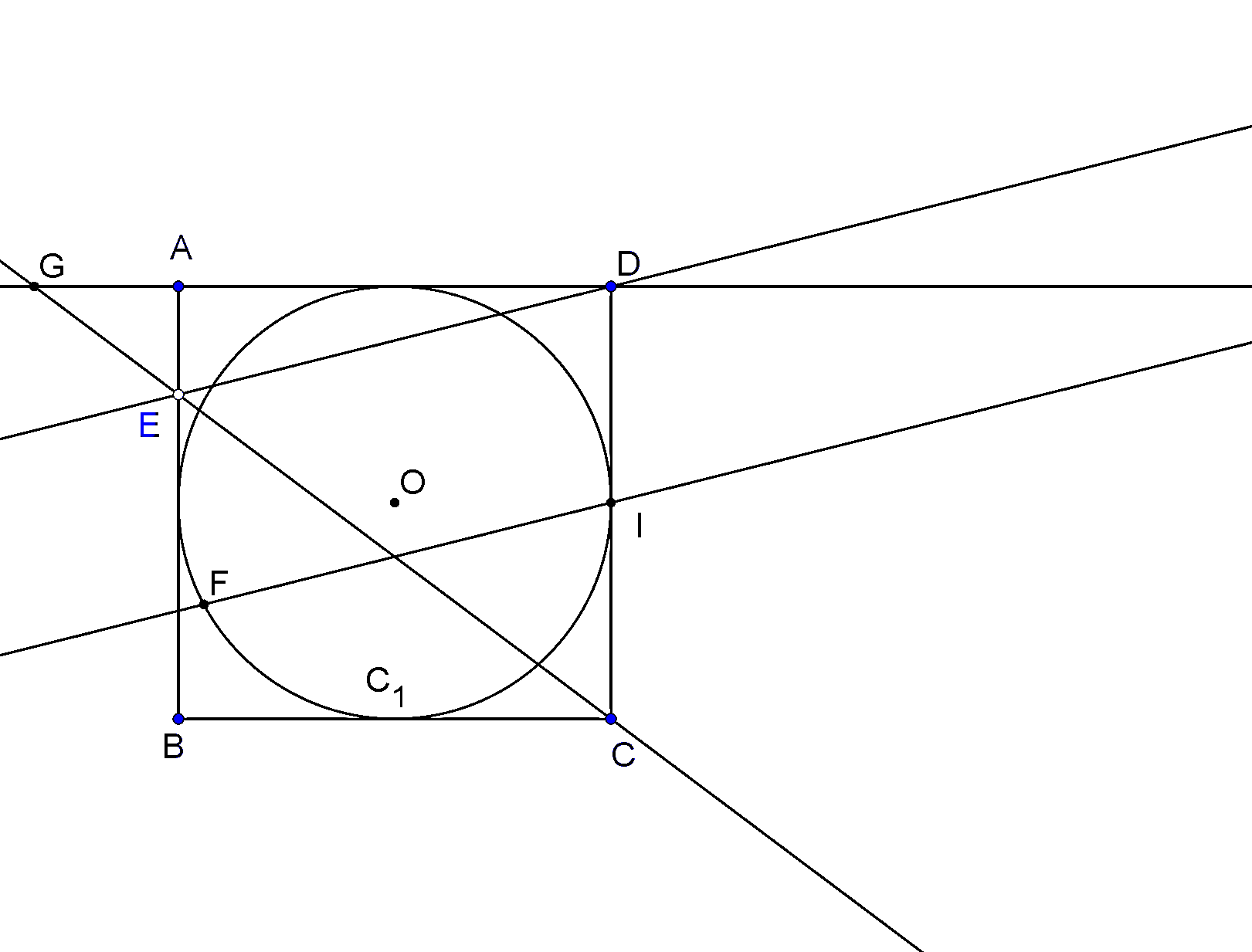
Soit A, B, C et D sont quatre points placés dans cet ordre sur un cercle.

* 1. Montrer que si les droites (AB) et (CD) sont parallèles alors ABCD est un trapèze isocèle.
  2. Montrer que si AD = BC alors ABCD est un trapèze isocèle.

On considère un carré ABCD et son cercle inscrit. On note :

* I le milieu de [CD] ;
* E un point du segment [AB] distinct du point B ;
* F le deuxième point d’intersection de et de la parallèle à (DE) passant par I ;
* G le point d’intersection des droites (AD) et (CE).

On veut montrer que la droite (GF) est tangente à en F.



1. On suppose que la droite (DE) recoupe le cercle circonscrit au carré ABCD en un point M et que la parallèle à (AM) passant par D recoupe le cercle en N. Montrer que les quadrilatères ADNM et DCNM sont des trapèzes isocèles.
2. En déduire que les triangles AEM et DCN sont semblables.
3. Montrer que les points G, M et N sont alignés. On pourra utiliser une homothétie.
4. Montrer que la droite (MN) est tangente à en F. On pourra utiliser une symétrie axiale.
5. Conclure.

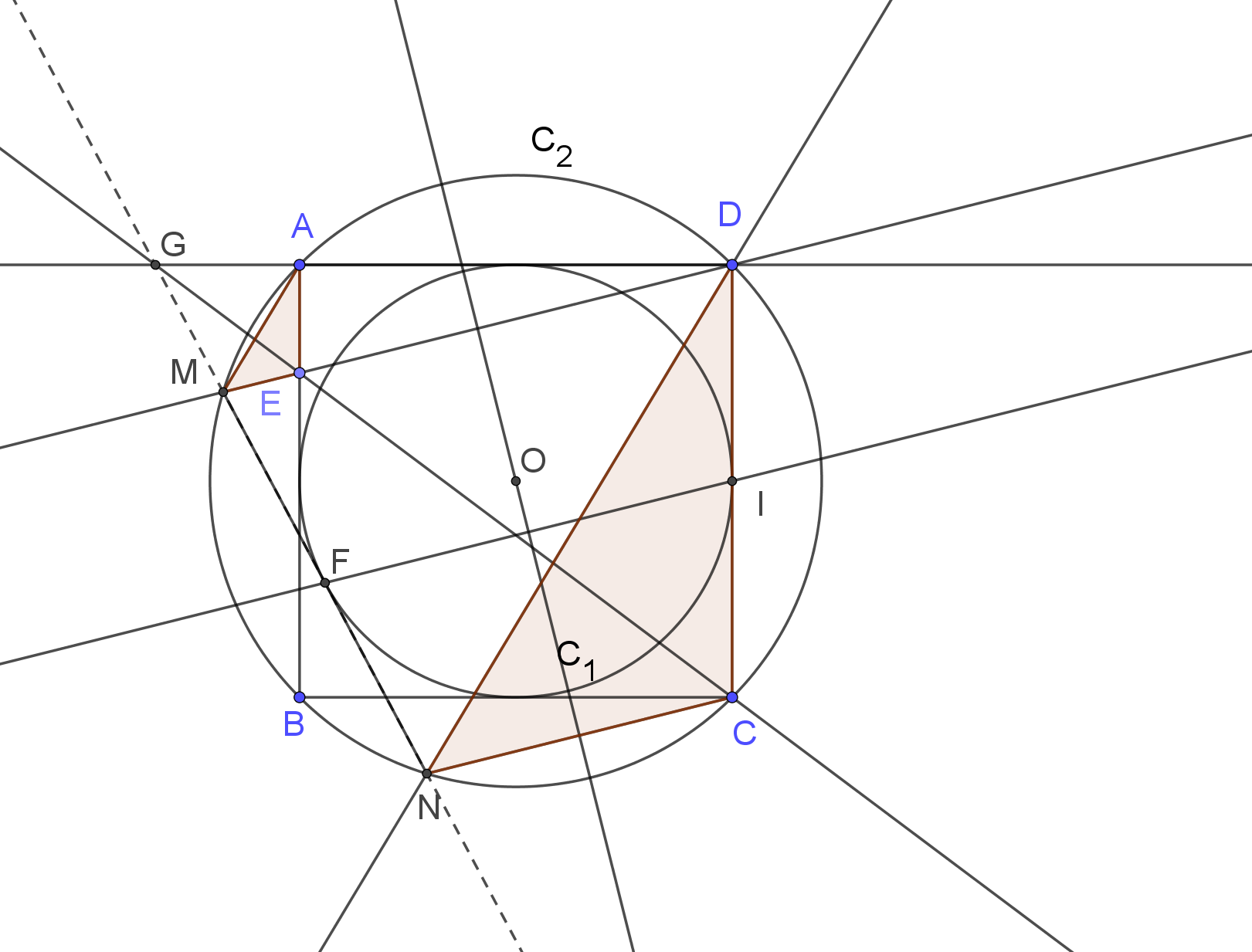
**Questions préliminaires**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre O. Donc :   OA = OB d’où O appartient à la médiatrice de [AB] ;  OC = OD d’où O appartient à la médiatrice de [CD].  Ces deux médiatrices sont perpendiculaires aux deux droites parallèles (AB) et (CD) donc elles sont parallèles. Elles passent de plus par le point O. Elles sont donc confondues. Une symétrie axiale conservant les distances, on en déduit, en utilisant la symétrie d’axe cette médiatrice commune, que AD = BC. |  |
| 1. Les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre O. Donc :   Les triangles OAD et OBC sont isocèles en O et isométriques  Les triangles OCD et OAB sont isocèles en O.  La somme des mesures des angles d’un quadrilatère vaut 360° donc, avec les  notations de la figure ci-contre, on peut écrire :  soit . On en déduit que, pour un point E  de la demi-droite [CD) extérieur au segment [CD] :  . |  |

Les angles alternes-internes et étant de même mesure, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. Par construction (E est sur le segment [AB]), les points A, D, N et M sont sur le cercle dans cet ordre et les droites (AM) et (DN) sont parallèles donc, d’après la question préliminaire **a.**, ADNM est un trapèze isocèle. En particulier AD = MN.

Par construction, les points D, C, N et M sont sur le cercle dans cet ordre et MN = AD = DC puisque ABCD est un carré. Donc, d’après la question préliminaire **b.**, ADNM est un trapèze isocèle. En particulier, les côtés de même longueur de ce trapèze étant [DC] et [MN], les bases de ce trapèze sont [CN] et [DM] donc (DM) est parallèle à (CN).



1. Par construction, (AM) est parallèle à (DM).

E est sur le segment [AB] et ABCD est un carré donc (AE) est parallèle à (DC).

(DM) est parallèle à (CN) et E appartient à (DM) donc (EM) et (CN) sont parallèles.

On en déduit que les triangles AEM et DCN sont semblables.

1. Plus précisément, soit l’homothétie de centre G transformant E en C.

car l’image de A est le point d’intersection de la droite (GA) avec la parallèle à (AE) passant par l’image de E.

Le point M est le point d’intersection de (AM) et (ME). L’image par de (AM) est la parallèle à (AM) passant par  : c’est la droite (DN). L’image par de (ME) est la parallèle à (ME) passant par  : c’est la droite (CN). On en déduit que .

En particulier, les points G, M et N sont alignés.

1. (DC) est la tangente à en I milieu de [DC] (car ABCD est un carré). CDNM est un trapèze isocèle donc si est la symétrie d’axe la médiatrice commune de [CN] et [DM], droite passant par le centre O de donc axe de symétrie de ce cercle, et (MN) est la tangente à en J milieu de [MN].

Or, par construction, F appartient à et (FI) est parallèle à (DM) donc appartient à la fois à et à (FI), soit et F est le milieu de [MN].

En particulier les points G, M, F et N sont alignés.

1. La droite (GF) est la droite (MN) qui est tangente à en F.

**Exercice 2 – Tiré du concours général 2017**

L’espace est rapporté à un repère orthonormé . Un point de est dit *entier* lorsque ses trois coordonnées et sont des entiers.

De même, un point du plan rapporté au repère sera dit *entier* lorsque ses deux coordonnées et sont des entiers.

Dans tout le problème, les triangles seront supposés non aplatis et leurs points tous distincts.

1. Soit un triangle du plan rapporté à un repère et le pied de sa hauteur issue de .
2. Prouver que .
3. En déduire que si et sont des points entiers du plan alors les coordonnées de sont des nombres rationnels.
4. Si est un triangle de l’espace , les résultats établis aux questions ***a*** et ***b*** ci-dessus sont-ils encore valables ?
5. ***a.*** Soit et deux vecteurs non nuls du plan. Montrer qu’il existe deux réels strictement positifs et et deux réels et tels que et .

Montrer que .

1. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets sont trois points entiers du plan rapporté au repère ?
2. ***a.*** Le point est un point de donc il existe un réel tel que et est sur la perpendiculaire à passant par donc soit c’est-à-dire .

On en déduit . Comme on a supposé , on en tire .

Donc et .

1. Comme les coordonnées de sont des entiers, il en est de même pour les nombres et ainsi que les coordonnées de et . Le quotient est donc un rationnel et les coordonnées du vecteur sont des rationnels, comme celle du point puisque celles du point sont des entiers.

*Remarque : on utilise ici le fait que somme, différence, produit, quotient de rationnels sont des rationnels.*

1. Oui car la colinéarité et l’orthogonalité se traduisent de la même façon dans l’espace.
2. ***a.*** Il suffit de poser et , .

Alors

1. Si est un triangle isocèle en alors d’après la question précédente en prenant l’angle géométrique. Le triangle est isocèle en donc d’où .

Or

Si et sont des points à coordonnées rationnelles alors est un nombre rationnel, ce qui est impossible si ABC est équilatéral puisqu’alors .

Il n’existe donc pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées rationnelles, encore moins des points entiers.

**Exercice 3 – Théorème de Carnot**

Soit ABC un triangle non aplati et D, E, F des points respectivement des droites (BC), (CA) et (AB).

Montrer que les perpendiculaires aux côtés du triangle et passant par D, E et F sont concourantes si et seulement si :

.

*Remarque préalable :* On a fait fonctionner, dans ce qui suit, le produit scalaire, mais on peut aussi utiliser le théorème de Pythagore en exprimant de deux manières différentes la somme pour la condition nécessaire, en introduisant le point O comme point d’intersection de deux des perpendiculaires pour la condition suffisante.

|  |  |
| --- | --- |
| Soit I le milieu d’un segment [AB] et M un point quelconque du plan. Montrons que si H est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) alors .    I est le milieu de [AB] donc .  En particulier  D’autre part, par définition de H, . |  |

Donc, pour tout point M de projeté orthogonal H sur [AB], .

* Si les trois droites sont concourantes, notons O leur point de concours.

Alors, d’après le résultat obtenu précédemment,

et , ce qui permet d’affirmer que

Soit .

* Réciproquement, si D, E, F sont des points respectivement des segments [BC], [CA], [AB] tels que :

soit

Comme le triangle ABC n’est pas aplati, les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles et les perpendiculaires à (BC) et (CA) passant respectivement par D et E se coupent en un point noté O.

Soit alors F’ le point d’intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par O avec (AB). On a alors :

par hypothèse

et car les droites (OD), (OE) et (OF’) sont concourantes en O.

On en déduit soit d’où . Or les vecteurs et sont colinéaires puisque les points A, B, F, F’ sont alignés. Donc .

**Exercice 4 – Comparaison d’aires**

Soit ABC un triangle. Une droite parallèle à (BC) coupe les droites (AB) et (AC) respectivement en D et D’. Une droite parallèle à (CA) coupe les droites (BC) et (BA) respectivement en E et E’. Une droite parallèle à (AB) coupe les droites (CA) et (CB) respectivement en F et F’.

Montrer que les triangles DEF et D’E’F’ ont même aire.

|  |  |
| --- | --- |
| On peut démontrer que si MNP est un triangle alors son aire est égale à . On en déduit que  et .  Or donc .  D’après le théorème de Thalès, . On pose .  On peut de même poser et |  |

On a alors soit .

De même et .

On en déduit que

Soit .

D’autre part, d’où

soit

De même et et on vérifie que :

.

**Exercice 5 – Racines complexes**

Soit des nombres complexes. On considère l’équation (\*) : .

Soit une racine complexe de (\*).

* + 1. Montrer que .
    2. Plus généralement, soit , montrer que .
    3. Montrer que (\*\*) : admet une unique solution, notée , dans **.**
    4. Montrer que .

1. Si alors, de façon évidente, .

Sinon, et il s’agit de montrer que .

est une racine complexe non nulle de (\*) donc s’écrit aussi .

On en déduit que d’où, puisque , .

On a donc et donc .

1. On fait le même raisonnement en distinguant les cas et , et en travaillant sur .
2. Sur , (\*\*) équivaut à .

Soit la fonction définie sur par . La fonction est dérivable sur et, pour tout , d’où et f est strictement croissante continue sur .

Comme de plus et , l’équation admet une unique solution .

1. D’après la question **2**, . Comme est solution de (\*\*), et donc .

**Exercice 6 – Tiré du concours général 2017**

Une partie non vide de est dite de type si pour tout et tout , le produit et la somme sont encore dans .

Dans tout le problème, désigne une partie de de type et on note le nombre de nombres complexes de dont le module est inférieur ou égal à 1. On note lorsque ce nombre est infini.

**Partie A**

* + 1. Les ensembles suivants sont des parties de de type (on ne demande pas de le vérifier). Déterminer pour chacun d’eux la valeur de :
       1. (b) (c) (d)
    2. ***a.*** Donner une partie de de type telle que

1. Donner une partie de de type telle que .
   * 1. On note c’est-à-dire la partie de constituée des nombres complexes conjugués des éléments de . Montrer que est de type et préciser .

**Partie B**

On définit le complexe et on note .

1. ***a.*** Calculer .
2. Montrer que est de type .
3. Montrer que .
4. On note . Justifier que est de type et déterminer .
5. On définit la partie de par .
   1. Montrer que est de type .
   2. Déterminer .

**Partie A**

1. et .
2. ***a*.**  Soit l’ensemble des entiers relatifs pairs non nuls. Le produit de deux entiers relatifs pairs non nul est bien un entier relatif pair non nul. Le carré d’un entier relatif pair non nul est un entier relatif pair non nul et la somme de deux entiers relatifs pairs non nuls est un entier relatif pair non nuls. Donc cet ensemble est de type . De plus (aucun nombre relatif pair de module inférieur ou égal à 1)

***b.*** Soit l’ensemble des entiers relatifs. Le produit et la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif donc est de type . De plus (les seuls nombres relatifs de de module inférieur ou égal à 1 sont ).

1. Le produit des conjugués de deux nombres complexes est le conjugué du produit de ces deux nombres. Le carré du conjugué d’un nombre complexe est le conjugué du carré de ce nombre. La somme des conjugués de deux nombres complexes est le conjugué de la somme de ces deux nombres. De plus la conjugaison est une bijection de dans. Donc si est une partie de de type alors est aussi une partie de de type .

Comme , .

**Partie B**

1. ***a.*** donc d’où .
2. Soit quatre entiers relatifs et et qui sont donc deux éléments de . Alors :

Or soit d’où

Et, comme l’ensemble est stable par addition et multiplication, et sont des entiers relatifs donc .

D’autre part, et de façon analogue pour .

D’où .

Les nombres et sont aussi des entiers relatifs donc .

Conclusion est un ensemble de type .

1. Soit et deux entiers relatifs et un élément de .

équivaut à soit . Or .

donc et donc

et équivaut à . On considère comme un trinôme du second degré en , trinôme dont le discriminant est .

Si c’est-à-dire alors le trinôme est de signe constat, le signe du coefficient de , c’est-à-dire . Comme est un entier, cette condition sera réalisée si .

ne sera donc réalisé que si ( étant un entier, le contraire de est ).

Or, toujours comme est un entier, équivaut à .

Si alors s’écrit soit . Les seules solutions entières de cette inéquation sont

Si alors s’écrit soit . Les seules solutions entières de cette inéquation sont .

Si alors s’écrit soit . Les seules solutions entières de cette inéquation sont .

On obtient ainsi 7 éléments dans de module inférieur ou égal à 1 :

et .

1. Le produit de deux éléments non nuls de est bien un élément non nul de .

Soit quatre entiers relatifs et et deux éléments non nuls de . Il reste à vérifier que .

équivaut à soit ou

Or et

Montrons qu’aucune des égalités n’est possible. Si on fixe , on cherche alors si les équations

et admettent au moins un couple d’entiers relatifs solution.

La première équation équivaut au système dont l’unique couple solution est Les réels obtenus ne sont rationnels que s’ils sont nuls car est irrationnel.

Or et que si ce qui est exclus dès le départ.

De même, la deuxième équation équivaut au système dont l’unique couple solution est . Par un raisonnement analogue au précédent, ce couple ne peut pas être un couple de rationnels non nuls.

Donc est bien un élément non nul de et est bien de type .

Enfin les éléments de de module inférieur ou égal à 1 sont ceux non nuls de à savoir et .

*Remarque : ces éléments sont en fait les six racines sixièmes de l’unité.*

1. ***a.*** Soit et deux éléments de .

et . Or et est de type donc et .

De plus, . Or , par stabilité par produit et et, par stabilité par somme, donc .

On en déduit que est de type .

1. Un nombre complexe est de module inférieur ou égal à 1 si et seulement si son carré est de module inférieur ou égal à 1.

Les éléments de de module inférieur ou égal à 1 sont donc les nombres complexes dont les carrés sont dans et de modules inférieurs ou égal à 1. Il s’agit donc, en plus du nombre 0, des racines douzièmes de l’unité (racines carrées des racines sixièmes).

donc .

**Dénombrement – Probabilités**

**Exercice 1 – Placement sur un table circulaire**

Combien y a-t-il de façons différentes d’assoir 6 filles et 15 garçons autour d’une table circulaire de 21 places de sorte qu’il y ait au moins deux garçons entre deux filles.

On ne considèrera que les positions relatives des personnes entre elles.

Chacune des 6 filles a un garçon à sa gauche et un à sa droite. Pour respecter la consigne d’au moins deux garçons entre chaque fille, cela nécessite déjà 12 garçons distincts. Le nombre de choix ordonnés de ces 12 garçons parmi les 15 est . Il reste 3 garçons à placer. Si on considère les 6 trios « une fille entre deux garçons » et les 3 garçons, cela donne 9 « groupes » (dont 3 réduits à une seule personne) à arranger autour de la table soit puisque seules les positions relatives sont prises en compte) Possibilités.

Au total, il y a donc façons d’assoir les 21 personnes.

**Exercice 2 – Sommes et formule du binôme**

Pour tout entier naturel non nul, calculer les sommes et

* Soit un entier naturel non nul et la fonction polynôme définie sur par . La fonction est dérivable sur et, pour tout réel ,

D’autre part, pour tout réel , donc .

Si , est deux fois dérivable et =.

Alors .

Si , et .

Donc, pour tout entier naturel non nul , .

* Soit maintenant la fonction définie sur par . En réutilisant la formule du binôme, on constate que les termes de puissances impaires de s’annulent et que .

Alors, est dérivable et

mais aussi .

est deux fois dérivable et

mais aussi .

D’où

**Exercice 3 – Relations entre coefficients**

Soit un entier naturel non nul et soit, pour tout , le coefficient de dans le développement de l’expression . Montrer que :

1. .
2. et .

**4**. si n’est pas multiple de 3.

Les coefficients sont tels que pour tout nombre réel ,

. (\*)

Si, dans cette égalité (\*), on remplace par puis on multiplie les deux membres de l’égalité par , on obtient, pour tout réel non nul :

(\*\*)

Ceci prouve déjà la symétrie des coefficients .

1. En remplaçant par dans (\*), on obtient : (\*\*\*)

comme , ,

en multipliant membre à membre (\*) et (\*\*\*),

(\*\*\*\*)

si on pose pour tout .

Les relations étant vraies pour une infinité de réels , on peut identifier les coefficients de dans les deux membres de (\*\*\*\*) et on obtient, par symétrie des coefficients  :

.

1. L’égalité s’obtient en considérant les coefficients de dans l’égalité (\*\*\*\*).
2. Les deux égalités s’obtiennent en posant successivement dans les égalités (\*) et (\*\*\*).
3. L’égalité s’obtient en multipliant les deux membres de (\*) par

**Exercice 4 – Principe des tiroirs**

1. Parmi 17 scientifiques, chacun est en correspondance avec tous les autres. Dans leurs échanges de lettres, ils ne traitent que trois sujets. Lors d’un échange entre deux scientifiques, ces derniers ne traitent que d’un seul sujet.

Montrer qu’il y a au moins 3 scientifiques qui traitent un seul et même sujet**.**

1. Dix joueurs ont pris part à un tournoi d’échecs où chaque joueur doit jouer exactement une partie contre tous les autres joueurs. Un joueur marque 1 point s’il gagne un duel, il perd un point s’il perd le duel et 0 point clôt un duel avec match nul. A la fin du tournoi, on constate que plus de 70% se sont terminés par un match nul.

Montrer que deux joueurs ont le même score final.

1. On commence par choisir un scientifique, noté . Comme il y a 17 scientifiques et seulement trois sujets traités, échange des lettres sur un seul sujet avec au moins 6 autres scientifiques, d’après le principe des tiroirs. En ne gardant que ces 6 scientifiques :

* soit il y en a deux qui correspondent sur le même sujet que celui des lettres reçues ou échangées avec et on a terminé ;
* soit deux d’entre eux correspondent sur un des deux autres sujets restants et alors, on recommence le même raisonnement en appliquant le principe des tiroirs à ces six scientifiques : deux d’entre eux échangent des lettres sur l’un des deux sujets possibles.

1. Le nombre de duels avec 10 joueurs est . Comme et plus de 70% se sont terminés par un match nul, il y a eu au moins 32 duels se terminant par un match nul soit au plus duels ne se terminant pas par un match nul. Si on suppose que les 10 joueurs ont des scores totaux tous distincts alors, en particulier, au plus un joueur a un score total nul. Cela signifie qu’au moins 9 joueurs ont des scores totaux strictement positifs ou strictement négatifs. Si ces 9 joueurs jouent le rôle des chaussettes et les signes ceux des tiroirs (un tiroir des positifs et un tiroir des négatifs) alors, d’après le principe des tiroirs, au moins 5 joueurs ont des scores totaux strictement positifs ou au moins 5 joueurs ont des scores totaux strictement négatifs. Par symétrie, on se place dans le premier cas. La somme des scores totaux (tous différents) positifs est donc au moins égale à . Cela implique qu’au moins 15 duels ne se sont pas terminés par un match nul ce qui contredit « au plus duels ne se terminant pas par un match nul ».

Conclusion : deux joueurs ont obtenu le même score total.

**Exercice 5 – tiré du Concours général 2021**

Soit un entier naturel non nul. Dans un sac, on place boules indiscernables au toucher et numérotées On vide alors progressivement le sac jusqu’à n’y laisser qu’une seule boule, selon le protocole suivant :

— on tire trois boules simultanément ;

— si les trois boules tirées ont pour numéros et , avec on élimine les boules de numéros et puis on replace dans le sac la boule de numéro ;

— on recommence les opérations précédentes.

Au bout de tirages, il ne reste plus qu’une seule boule, et on note son numéro. Pour tout entier , on note la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro

**I – Étude des petits cas**

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire .
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire .

**II – Valeurs extrêmes et symétrie**

1. Déterminer la probabilité .
2. Déterminer la probabilité en fonction de .
3. Soit un entier tel que . Pourquoi a-t-on ?
4. Calculer l’espérance de la variable aléatoire en fonction de .

Les boules étant indiscernables au toucher, les conditions de tirage assurent l’équiprobabilité.

**Partie I**

1. Lorsque , le sac contient trois boules numérotées 0, 1 et 2. La boule numérotée 1 est nécessairement la dernière boule restante donc ne prend que la valeur 1 avec la probabilité 1.
2. Lorsque , le sac contient cinq boules numérotées 0, 1, 2, 3, 4 et, lors de la première étape, on a tirages distincts possibles. On replace une boule dans le sac qui en contient alors trois qu’on tire pour la deuxième étape et a boule qui reste est déterminée. On peut ainsi décrire toutes les situations dans le tableau ci-dessous.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Premier tirage** | **Boule remise** | **Boules dans le sac** | **Dernière boule** |
| 0, 1, 2 | 1 | 1, 3, 4 | 3 |
| 0, 1, 3 | 1 | 1, 2, 4 | 2 |
| 0, 1, 4 | 1 | 1, 2, 3 | 2 |
| 0, 2, 3 | 2 | 1, 2, 4 | 2 |
| 0, 2, 4 | 2 | 1, 2, 3 | 2 |
| 0,3, 4 | 3 | 1, 2, 3 | 2 |
| 1, 2, 3 | 2 | 0, 2, 4 | 2 |
| 1, 2, 4 | 2 | 0, 2, 3 | 2 |
| 1, 3, 4 | 3 | 0, 2, 3 | 2 |
| 2, 3, 4 | 3 | 0, 1, 3 | 1 |

D’où et .

**Partie II**

1. Dans tout tirage, si la boule 0 est tirée, elle est nécessairement la plus petite donc éliminée. On obtient .

On peut remarquer que de même et que ne peut prendre que les valeurs .

1. La boule numérotée 1 reste la dernière uniquement lorsque le dernier tirage donne les boules 0, 1 et une autre boule. Cela signifie que les boules 0 et 1 n’ont pas été obtenues lors des premiers tirages.

Pour faire le premier tirage (de 3 boules parmi ), il y a résultats possibles. Parmi ces résultats, il y en a qui ne contiennent pas les boules 0 et 1. La probabilité que les boules 0 et 1 ne soient pas tirées est donc

Pour faire le deuxième tirage, il reste boules dans le sac (dont les boules 0 et 1), et la probabilité que ce tirage ne contienne pas les boules 0 et 1 est .

On reproduit le même raisonnement à chaque étape…

Pour faire le tirage, il reste 7 boules dans le sac (dont les boules 0 et 1), et la probabilité que ce tirage ne contienne pas les boules 0 et 1 est .

Pour faire le tirage, il reste 5 boules dans le sac (dont les boules 0 et 1), et la probabilité que ce tirage ne contienne pas les boules 0 et 1 est .

Au final, on obtient la probabilité en multipliant entre elles les probabilités obtenues précédemment, soit .

1. Si on imagine faire une double numérotation de chaque boule en ajoutant à la boule numérotée la numérotation , on peut définir une nouvelle variable aléatoire qui prend comme valeur la nouvelle numérotation. Comme le protocole de l’expérience reste inchangé, cette nouvelle variable aléatoire suit la même loi que et . Or «  » équivaut à «  »

Donc, pour tout tel que , .

1. La variable aléatoire prend les valeurs entières comprises entre 1 et

donc . (\*)

En appliquant le résultat de la question précédente et en posant , on peut aussi écrire

ce qui s’écrit aussi (\*\*).

En ajoutant membre à membre (\*) et (\*\*), on obtient

Soit donc .