**Préparation au concours général de mathématiques**

**Année 2021-2022**

**Fiche numéro 1**

**Exercice 1 Triangulation**

Une *triangulation* d’un polygone régulier est un partage de l’intérieur de ce polygone en triangles. Chaque sommet de chaque triangle est alors soit un sommet du polygone soit un point à l’intérieur du polygone.

On considère un polygone régulier ayant $n$ sommets ($n\geq 3$) et $k$ points en son intérieur (sans que trois de ces $n+k$ points soient alignés).

On suppose que :

* Le seul point commun à deux segments dont les extrémités sont deux de ces $n+k$ points est l’une des extrémités de ces segments.
* Chaque point intérieur au polygone est le sommet d’au moins un triangle.

On admet que toutes les triangulations possibles d’un polygone régulier ayant $n$ sommets avec$ k$ points intérieurs produisent le même nombre de triangles, nombre qu’on note $T(n,k)$.

Par exemple, pour $n=6$, on obtient 4 triangulations si $k=0$ et 6 triangulations si $k=1$ (figures ci-dessous)



1. Déterminer $T(3,2)$ puis $T(4,100)$.
2. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $T(n,n)=2020$.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Comme toutes les triangulations possibles d’un polygone régulier ayant $n$ sommets avec$ k$ points intérieurs produisent le même nombre de triangles, il suffit de produire une triangulation comme sur la figure ci-contre pour calculer $T(3,2)$.

On en déduit que $T\left(3,2\right)=5$ |  |

On commence par étudier $T(4,k)$ pour les premières valeurs de $k$ :



On cherche ensuite une relation de récurrence en remarquant que puisque toutes les triangulations possibles d’un polygone régulier ayant $n$ sommets avec$ k$ points intérieurs produisent le même nombre de triangles, on peut passer de $T(4,k)$ à $T(4,k+1)$ en introduisant dans un triangle un point intérieur nouveau P (non aligné avec deux des points intérieurs déjà existants).

|  |  |
| --- | --- |
| De plus, en ajoutant le point P dans un triangle, on remplace ce triangle $T$ par trois triangles (en reliant P aux sommets du triangle $T$), ce qui crée deux triangles de plus.On a donc, pour tout entier $k\geq 0$, $T\left(4,k+1\right)=2+ T(4,k)$.La suite $\left(T(4,k)\right)\_{k\geq 0}$ est donc la suite arithmétique de raison 2 et de  |  |

premier terme $T\left(4,0\right)=2$. On en déduit que $T\left(4,100\right)=2+ 2×100=202$.

1. Dans la triangulation d'un polygone régulier ayant $n$ sommets comprenant aucun point intérieur, on peut choisir de relier l'un des $n$ sommets à chacun des $n-3$ sommets restants qui ne lui sont pas adjacents. Dans une telle triangulation de polygones réguliers, on obtient $n-2$ triangles donc, pour tout $n\geq 3$, $T(n,0)=n-2$.

De plus, le raisonnement fait dans le a pour exprimer $T\left(4,k+1\right)$ en fonction de $T\left(4,k\right)$ peut se faire pour $n$ quelconque, donc pour tout $n\geq 3$ et pour tout entier $k\geq 0$, $T\left(n,k+1\right)=2+ T(n,k)$.

D’où $T\left(n,k\right)=T\left(n,0\right)+2k=n-2+2k$ pour toute triangulation d’un polygone régulier ayant $n$ sommets et $k$ points intérieurs.

On a donc $T\left(n,n\right)=n-2+2n=3n-2$ et $T\left(n,n\right)=2 020$ équivaut à $3n-2=2 020$ soit $n=674$.

**Exercice 2 Fonctions compatibles**

On dit que deux fonctions $f$ et $g$ de **R** dans **R** sont compatibles lorsque :

1. Pour tous réels $x$ et $y$, $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)g\left(y\right)+g\left(x\right)f(y)$
2. Pour tous réels $x$ et $y$, $g\left(x+y\right)=g\left(x\right)g\left(y\right)-f\left(x\right)f(y)$
3. Il existe un réel $x$, $f(x)\ne 0$.

Soit $f $et $g$ deux fonctions compatibles.

1. Déterminer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Soit $h$ la fonction définie par, pour tout réel $x$, $h\left(x\right)=\left(f(x)\right)^{2}+\left(g(x)\right)^{2}$.

Montrer que pour tout réel $x$, $h\left(x\right)h\left(-x\right)=1$.

1. On suppose que, pour tout réel $x,$ $-10\leq f(x)\leq 10$ et $-10\leq g(x)\leq 10$.
	1. Montrer que pour tout réel $x, h(x)\leq 200$.
	2. Montrer que pour tout entier $n$ et pour tout réel $x,$ $h\left(2^{n}x\right)=\left(h\left(x\right)\right)^{2^{n}}$
	3. En déduire que $h\left(2 022\right)=1$.
2. La propriété (i) pour $x=y=0$ donne $f\left(0\right)=2f\left(0\right)g\left(0\right)$ soit $f\left(0\right)=0$ ou $g\left(0\right)=\frac{1}{2}$.

La propriété (ii) pour $x=y=0$ donne $g\left(0\right)=\left(g(0)\right)^{2}-\left(f(0)\right)^{2}$.

Si $g\left(0\right)=\frac{1}{2}$, cetet égalité s’écrit $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\left(f(0)\right)^{2}$ soit $\left(f(0)\right)^{2}=-1$ ce qui est impossible puisque $f\left(0\right)$ est un réel. Donc $g\left(0\right)\ne \frac{1}{2}$, ce qui signifie que $f\left(0\right)=0$.

D’après la propriété (ii), pour tout réel $x$, $f\left(x+0\right)=f\left(x\right)g\left(0\right)+g\left(x\right)f\left(0\right)$soit $f\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(0\right)$

D’après la, propriété (iii), on en déduit que $g\left(0\right)=1$.

*Remarque : les fonctions sinus et cosinus ont les trois propriétés. Il existe donc bien des focntions compatibles.*

1. D’après le a, $f\left(0\right)=0$ et $g\left(0\right)=1$ donc $\left(f\left(0\right)\right)^{2}+\left(g(0)\right)^{2}=1$ ce qui peut s’écrire, pour tout réel $x$,

$1=\left(f\left(x+(-x)\right)\right)^{2}+\left(g(x+(-x))\right)^{2}$

Soit $1=\left(f\left(x)g\left(-x\right)+g\left(x\right)f(-x)\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)g\left(-x\right)-f\left(x\right)f(-x))\right)^{2}$

Soit $1=\left(f(x)\right)^{2}\left(g(-x)\right)^{2}+2f\left(x\right)g\left(-x\right)g\left(x\right)f\left(-x\right)+\left(g\left(x\right)\right)^{2}\left(f\left(-x\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)\right)^{2}\left(g\left(-x\right)\right)^{2}-2g\left(x\right)g\left(-x\right)f\left(x\right)f(-x)+\left(f(x)\right)^{2}\left(f(-x)\right)^{2}$

Soit $1=\left(f(x)\right)^{2}\left(g(-x)\right)^{2}+\left(g(x)\right)^{2}\left(f(-x)\right)^{2}+\left(g(x)\right)^{2}\left(g(-x)\right)^{2}+\left(f(x)\right)^{2}\left(f(-x)\right)^{2}+2(f\left(x\right)g\left(-x\right)g\left(x\right)f(-x)+g\left(x\right)g\left(-x\right)f\left(x\right)f(-x))$

Or $f\left(x\right)g\left(-x\right)g\left(x\right)f(-x)+g\left(x\right)g\left(-x\right)f\left(x\right)f(-x)=0$

Donc $1=\left(f(x)\right)^{2}\left(g(-x)\right)^{2}+\left(g(x)\right)^{2}\left(f(-x)\right)^{2}+\left(g(x)\right)^{2}\left(g(-x)\right)^{2}+\left(f(x)\right)^{2}\left(f(-x)\right)^{2}$

Soit $1=\left(g\left(-x\right)\right)^{2}\left(\left(f\left(x\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)\right)^{2}\right)+\left(f\left(-x\right)\right)^{2}\left(\left(g\left(x\right)\right)^{2}+\left(f\left(x\right)\right)^{2}\right)$

Soit $1=\left(\left(f\left(x\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)\right)^{2}\right)\left(\left(g\left(-x\right)\right)^{2}+\left(f\left(-x\right)\right)^{2}\right)$

C’est-à-dire, pour tout réel $x$, $h(x)h(-x)=1$.

1. D’aprè le b, $h(2 022)h(-2 022)=1$. Montrons par l’absurde que $h\left(2 022\right)=1.$

Supposons que $h\left(2 022\right)\ne 1$. Par défintion de $h$, pour tout réel $x$, $h(x)\geq 0$.

De plus, pour tout réel $x,$ $-10\leq f(x)\leq 10$ et $-10\leq g(x)\leq 10$ donc $\left(f\left(x\right)\right)^{2}\leq 100$ et $\left(g\left(x\right)\right)^{2}\leq 100$ d’où l’on tire $h(x)\leq 200$.

Comme $h(2 022)h(-2 022)=1$, Comme $h(2 022)\ne 0$ et on a supposé que $h\left(2 022\right)\ne 1$ donc soit $h\left(2 022\right)>1$ et $0<h\left(-2 022\right)<1$ soit $h\left(-2 022\right)>1$ et $0<h\left(2 022\right)<1$.

Or, pour tout réel $x$, $f\left(2x\right)=f\left(x+x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g\left(x\right)=2f\left(x\right)g(x)$

Et $g\left(2x\right)=g\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)f\left(x\right)=\left(g\left(x\right)\right)^{2}-\left(f\left(x\right)\right)^{2}$.

D’où $h\left(2x\right)=\left(f\left(2x\right)\right)^{2}+\left(g\left(2x\right)\right)^{2}=\left(2f\left(x\right)g(x)\right)^{2}+\left(\left(g\left(x\right)\right)^{2}-\left(f\left(x\right)\right)^{2}\right)^{2}$

Soit $h\left(2x\right)=4\left(f\left(x\right)\right)^{2}\left(g\left(x\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)\right)^{4}-2\left(g\left(x\right)\right)^{2}\left(f\left(x\right)\right)^{2}+\left(f\left(x\right)\right)^{4}$

Soit $h\left(2x\right)=\left(f\left(x\right)\right)^{4}+2\left(g\left(x\right)\right)^{2}\left(f\left(x\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)\right)^{4}=\left(\left(f\left(x\right)\right)^{2}+\left(g\left(x\right)\right)^{2}\right)^{2}=\left(h(x\right))^{2}$.

On démontre alors par récurrence sur $n$ que, pour tout entier $n$ et tout réel $x$, $h\left(2^{n}x\right)=\left(h\left(x\right)\right)^{2^{n}} :$

* Pour $n=0$, on a bien pour tout réel $x$, $h\left(2^{0}x\right)=h\left(x\right)=\left(h(x)\right)^{1}=\left(h(x)\right)^{2^{0}}$
* Si pour un entier $n,$ on a pour tout réel $x$, $h\left(2^{n}x\right)=\left(h\left(x\right)\right)^{2^{n}}$

alors $h\left(2^{n+1}x\right)=h\left(2×2^{n}x\right)=\left(h(2^{n}x\right))^{2}=\left(\left(h\left(x\right)\right)^{2^{n}}\right)^{2}=\left(h\left(x\right)\right)^{2^{n+1}}$.

Or on a vu que si $h\left(2 022\right)\ne 1$ alors soit $h\left(2 022\right)>1$ soit $h\left(-2 022\right)>1$ ce qui entraine soit $h\left(2^{n}×2 022\right)$ soit $h\left(-2^{n}×2 022\right)$ tend vers $+\infty $ quand $n$ tend vers $+\infty $. Ceci contredit le fait que pour tout réel $x$, $h(x)\leq 200$.

Donc $h\left(2 022\right)=1$.

**Exercice 3 Équation fonctionnelle**

Déterminer toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que pour tous réels $x$ et $y$,

$f(f\left(x+y)-f\left(x-y\right)\right)=y^{2}f(x)$. ($E(x,y)$)

On pourra commencer par montrer qu’une telle fonction est paire.

On constate déjà que la fonction nulle convient.

Si $f$ n’est pas la fonction nulle alors il existe un réel $a$ tel que$ f(a)\ne 0$.

La relation $E(x,0)$ donne $f\left(f\left(x\right)-f\left(x\right)\right)=0$ soit $f\left(0\right)=0$.

La relation $E(a,y)$ donne, pour tout réel $y$, $f\left(f\left(a+y\right)-f\left(a-y\right)\right)=y^{2}f(a)$. Comme $f\left(a\right)\ne 0$ et lorsque $y$ décrit **R**, $y^{2}$ décrit **R+**, la fonction$ f$ peut prendre toutes les valeurs strictement positives (si $f(a)>0$) ou prendre toutes les valeurs strictement négatives (si $f(a)<0$).

La relation $E(x,x)$ donne, pour tout réel $x$, $f(f\left(2x\right)-f(0))=x^{2}f(x)$ soit $f\left(f\left(2x\right)\right)=x^{2}f(x)$

Et la relation $E(x,-x)$ donne, pour tout réel $x$, $f(f\left(0\right)-f(2x))=x^{2}f(x)$ soit $f\left(-f\left(2x\right)\right)=x^{2}f(x)$

Comme $f(2x)$ peut prendre n’importe quelle valeur positive ou n’importe quelle valeur négative (suivant le signe de $f(a)$ )et comme pour tout réel $x$ , $f\left(f\left(2x\right)\right)=f\left(-f(2x)\right)$, on en déduit que la fonction $f$ est paire.

La relation $E(x,y)$ donne donc, pour tous réels $x$ et $y$ non nuls,

$x^{2}f\left(y\right)=f\left(f\left(y+x\right)-f\left(y-x\right)\right)=f\left(f\left(y+x\right)-f\left(-y+x\right)\right)=y^{2}f(x)$ en appliquant la parité de $f$.

Ceci s’écrit aussi $\frac{f(x)}{x^{2}}=\frac{f(y)}{y^{2}}$. On en déduit qu’il existe un réel $c$ tel que pour tout réel non nul $x$, $f\left(x\right)=cx^{2}$, expression aussi valable pour$ x=0$ puisque $f\left(0\right)=0$.

En reprenant l’égalité $f\left(f\left(2x\right)\right)=x^{2}f(x)$ pour $x=1$, on obtient $f\left(c×4\right)=1×c$ soit $c×16c^{3}=c$ équation en c dont les solutions sont $0,-\frac{1}{4},\frac{1}{4}$.

Le problème admet donc trois solutions, les fonctions définies sur **R** par $f\left(x\right)=$ $-\frac{1}{4}x^{2}, g\left(x\right)=\frac{1}{4}x^{2}$ et la fonction nulle.

**Exercice 4 Sommes et produits**

Trouver tous les triplets de réels $\left(a,b,c\right)$ tels que $\left\{\begin{matrix}a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\\a^{2}+b^{2}+c^{2}=\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}\end{matrix}\right. $.

On pourra poser $s=a+b+c$, $t=ab+bc+ca$, $p=abc$.

En réduisant au même dénominateur le membre de droite de chaque équation du système donné, on se ramène à résoudre le système $\left\{\begin{matrix}s=\frac{bc+ca+ab}{abc}\\s^{2}-2ab-2bc-2ca=\frac{b^{2}c^{2}+c^{2}a^{2}+a^{2}b^{2}}{a^{2}b^{2}c^{2}}\end{matrix}\right. $

soit $\left\{\begin{matrix}sp=t\\s^{2}p^{2}-2tp^{2}=t^{2}-2(abc^{2}+a^{2}bc+ab^{2}c)\end{matrix}\right.$

Soit $\left\{\begin{matrix}sp=t\\s^{2}p^{2}-2tp^{2}=t^{2}-2ps\end{matrix}\right.$.

En reportant la première équation dans la deuxième, on obtient $s^{2}p^{2}-2sp^{3}=s^{2}p^{2}-2ps$

qui s’écrit $2sp\left(1-p^{2}\right)=0$ c’est-à-dire $p=0$ ou $s=0$ ou $p^{2}=1$.

* On ne peut avoir $p=0$, car l’un au moins des quotients de la première équation du système initial ne serait pas défini.
* Si $s=0$ alors, comme $sp=t$, $t=0$, ce qui s’écrit $0=ab+bc+ca=ab+c\left(a+b\right)=ab-\left(a+b\right)^{2}$ puisque $s=0$. On en tire $a^{2}+b^{2}+ab=0$ soit, en divisant par$b^{2}$ puisque $b\ne 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{2}+\frac{a}{b}+1=0$

Or l’équation $x^{2}+x+1=0 $n’a pas de solution réelle. On ne peut donc avoir $s=0$.

Nécessairement $p^{2}=1$ soit $p=1 ou p=-1$

Si $p=1 $:

Comme $c=\frac{1}{ab}$, la première équation du système initial s’écrit $a+b+\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab$ soit, en réduisant au même dénominateur $ab$ et en multipliant par ce dénominateur :

$a^{2}b^{2}+b+a-a^{2}b-ab^{2}-1=0$ soit $ab\left(ab-a-b\right)+\left(a+b+1\right)=0$

Soit $ab\left(ab-a-b+1\right)+\left(-ab+a+b-1\right)=0$ soit $\left(ab-1)(ab-a-b-1)\right)=0$

C’est-à-dire $\left(ab-1)(a-1)(b-1)\right)=0$

On a donc $:$

$ab=1$ d’où $c=1$ soit $b=\frac{1}{a} $ et comme solutions les triplets $\left(a,\frac{1}{a},1\right)$

ou $a=1$ d’où ou $bc=1$ soit $c=\frac{1}{b}$ et comme solutions les triplets $\left(1,b,\frac{1}{b}\right)$

ou $b=1$ d’où ou $ca=1$ soit $c=\frac{1}{a}$ et comme solutions les triplets $\left(a,1,\frac{1}{a}\right)$

Si $p=-1 $:

Par le même raisonnement, $c=-\frac{1}{ab}$ et la première équation s’écrit $a+b-\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-ab$

Soit, par des calculs analogues au cas précédent, $\left(ab-1)(a+1)(b+1)\right)=0$, ce qui permet d’aboutir aux triplets solutions $\left(a,\frac{1}{a},-1\right)$ ou $\left(-1,b,\frac{1}{b}\right)$ ou $\left(a,-1,\frac{1}{a}\right)$.

Au final, on peut aisément vérifier que tous les triplets obtenus sont bien solutions du système initial.

**Exercice 5 À la recherche de nombres premiers**

Existe-t-il des entiers naturels $n$ tels que le nombre $N=8^{n}+47$ soit un nombre premier ?

On pourra s’aider de congruences.

On remarque que $N≡\left(-1\right)^{n}+2 \left[3\right]$ et que si $n$ est pair alors $N≡3 \left[3\right]$ ou encore $N≡0 \left[3\right]$,et donc $N$ est divisible par 3 donc non premier.

On pose donc $n=2k+1$ où k est un entier. Alors $N=8^{2k+1}+47=64^{k}×8+47$ et on s’intéresse d’autres congruence faisant intervenir une puissance de $(-1)$,

* la congruence modulo 13 : $N≡\left(-1\right)^{k}×8+8 \left[13\right]$ et si $k$ est impair alors $N≡0 \left[13\right]$ donc $N$ est divisible par 13 et donc non premier.
* La congruence modulo 5 : $N≡\left(-1\right)^{k}×3+2 \left[5\right]$ et si $k$ est pair alors $N≡5 \left[5\right]$ soit $N≡0 \left[5\right]$ donc $N$ est divisible par 5 et donc non premier.

Il n’existe donc pas d’entier naturels $n$ tel que le nombre $N=8^{n}+47$ soit un nombre premier.