**Préparation au concours général de mathématiques**

**Année 2021-2022**

**Fiche numéro 2**

**Exercice 1**

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

 $a^{2^{n}}-1=(a-1)(a+1)(a^{2}+1))(a^{4}+1)…)(a^{2^{n-1}}+1)$

1. En déduire que pour tout entier $n>1$ et pour tout entier $a$ impair, $a^{2^{n}}-1$ est un multiple de $2^{n+2}$
2. Montrer qu’un entier,$n>1$, est impair si et seulement si $n$ divise $1^{n}+2^{n}+…+\left(n-1\right)^{n}$.
3. Pour $n=1$, $a^{2^{n}}-1=a^{2}-1=(a-1)(a+1)$ et la propriété est vérifiée

Si, pour un entier $n$, on a $a^{2^{n}}-1=(a-1)(a+1)(a^{2}+1)(a^{4}+1)…)(a^{2^{n-1}}+1)$ alors

$$a^{2^{n+1}}-1=\left(a^{2^{n}}\right)^{2}-1=\left(a^{2^{n}}-1\right)\left(a^{2^{n}}+1\right)=(a-1)(a+1)(a^{2}+1)(a^{4}+1)…)(a^{2^{n-1}}+1)\left(a^{2^{n}}+1\right)$$

Et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

On a donc bien, tout entier naturel non nul $n$, $a^{2^{n}}-1=(a-1)(a+1)(a^{2}+1)(a^{4}+1)…)(a^{2^{n-1}}+1)$.

1. Comme $a$ est impair, il existe un entier $p$ tel que $a=2p+1$.

Alors $\left(a-1\right)\left(a+1\right)=2p\left(2p+2\right)=4p(p+1)$. Or le produit de deux entiers consécutifs est pair donc le nombre $\left(a-1\right)\left(a+1\right)$ est un multiple de $8=2^{3}$.

Chacun des $n-1$ facteurs du produit $(a^{2}+1)(a^{4}+1)…)(a^{2^{n-1}}+1)$ est pair (somme de deux nombres impairs).

Au final $a^{2^{n}}-1$ est multiple de $2^{3}×2^{n-1}=2^{n+2}$.

1. Posons $S\_{n}=1^{n}+2^{n}+…+\left(n-1\right)^{n}$.
* Si $n$ est impair, alors pour tout entier $k$, $2\leq k\leq n-1$, $k^{n}+\left(n-k\right)^{n}$ est divisible par $n$ car le seul terme du développement de $\left(n-k\right)^{n}$ non divisible par $n$ est $\left(-k\right)^{n}$ soit $-k^{n}$ si $n$ est impair. On en déduit que $n$ divise $2S\_{n}$ et donc $n$ divise $S\_{n}$ car $n$ est impair.
* Si$ n$ est pair, alors il existe un entier $a\geq 1$ et un entier $m$ impair tels que $n=2^{a}m$.
	+ Si $k$ est impair, alors d’après le b, $k^{2^{a}}-1$ est un multiple de $2^{a}$ soit $k^{2^{a}}≡1 \left[2^{a} \right]$

d’où $\left(k^{2^{a}}\right)^{m}≡1 \left[2^{a} \right]$;

* + Si $k$ est pair, alors $\left(k^{2^{a}}\right)^{m}≡0 \left[2^{a} \right]$ et $S\_{n}≡1+1+…+1 \left[2^{a} \right]$, somme dans laquelle on n’a gardé que les valeurs de $k$ paires, valeurs au nombre de $\frac{n}{2}=2^{a-1}m$ mais alors $n$ ne peut diviser $S\_{n}$.

**Exercice 2**

Soit $n$ un entier naturel non nul, on appelle index d’abondance le nombre $I\_{n}=\frac{S(n)}{n}$, où $S(n)$ est la somme de tous les diviseurs positifs de $n$, y compris 1 et $n$.

1. Démontrer que pour tout nombre premier $p$, $I\_{p}\leq \frac{3}{2}$.
2. Démontrer que pour tout nombre premier impair $p$ et pour tout entier strictement positif $k$, $I\left(p^{k}\right)<2$.
3. Soit $p$ et $q$ deux nombres premiers distincts et soit $a$ et $b$ deux entiers positifs.

Démontrer que $I\left(p^{a}\right)I\left(q^{b}\right)= I\left(p^{a}q^{b}\right)$.

1. Déterminer le plus petit entier impair positif $n$ tel que $I\left(n\right)>2$.
2. Soit $p$ un nombre premier. Ses deux diviseurs sont 1 et $p$ donc $I\left(p\right)=\frac{1+p}{p}=\frac{1}{p}+1$

Comme $p\geq 2$, on en déduit que $I\left(p\right)\leq \frac{3}{2}$.

1. Soit$ p$ un nombre premier impair. On a donc $p\geq 3$ et si $k$ est un entier positif, alors les diviseurs positifs de $p^{k}$ sont $1, p,$ $p^{2},…, p^{k-1},p^{k}$ donc $I\left(p^{k}\right)=\frac{1+p+ p^{2}+…+ p^{k-1}+p^{k}}{p^{k}}=\frac{1}{p^{k}}+\frac{1}{p^{k-1}}+…+\frac{1}{p^{2}}+\frac{1}{p}+1=\frac{1-\frac{1}{p^{k+1}}}{1-\frac{1}{p}}$

On en déduit que $I\left(p^{k}\right)<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ soit $I\left(p^{k}\right)<\frac{p}{p-1}$ soit $I\left(p^{k}\right)<1+\frac{1}{p-1}$.

Comme $p\geq 3$, $\frac{1}{p-1}\leq \frac{1}{2}$. d’où $I\left(p^{k}\right)<1+\frac{1}{p-1}\leq 2$ d’où $I\left(p^{k}\right)<2.$

1. Comme$ p$ est un nombre premier, les diviseurs positifs de $p^{k}$ sont $1, p,…,p^{k}$ donc $I\left(p^{2}\right)=\frac{1+p+…+ p^{k}}{p^{k}}$.

Comme $q$ est un nombre premier, on a de même $I\left(q^{l}\right)=\frac{1+q+…+q^{l}}{q^{b}}$ .

En regroupant « astucieusement » les diviseurs de $p^{k}q^{l}$, on a :

$I\left(p^{k}q^{l}\right)=\frac{1+p+…+p^{k}+q\left(1+p+…+p^{k}\right)+…+q^{l}(1+p+…+p^{k})}{p^{k}q^{l}}=\frac{\left(1+p+…+p^{k}\right)(1+q+…+q^{l})}{p^{k}q^{l}}=I\left(p^{k}\right)I\left(q^{l}\right)$

1. D’après le a. un entier $n$ tel que $I\left(n\right)>2$ est nécessairement non premier.

Il existe donc $m$ entiers premiers $p\_{1}, p\_{2},….,p\_{m}$ deux à deux distincts et $m$ entiers naturels non nuls $k\_{1},k\_{2},…,k\_{m}$ tels que $n=p\_{1}^{k\_{1}}p\_{2}^{k\_{2}}…p\_{m}^{k\_{m}}$.

* En prolongeant le résultat obtenu à la question c, on peut alors écrire $I\left(n\right)=I\left(p\_{1}^{k\_{1}}\right)I(p\_{2}^{k\_{2}})…I(p\_{m}^{k\_{m}})$.
* Soit $p$ et $q$ sont deux nombres premiers tels que$ p<q$ et soit $k$ un entier positif. Alors, comme

$I\left(p^{k}\right)=\frac{1+p+ p^{2}+…+ p^{k-1}+p^{k}}{p^{k}}=\frac{1}{p^{k}}+\frac{1}{p^{k-1}}+…+\frac{1}{p^{2}}+\frac{1}{p}+1$

Et $I\left(q^{k}\right)=\frac{1+q+ q+…+ q^{k}}{q^{k}}=\frac{1}{q^{k}}+…+\frac{1}{q^{2}}+\frac{1}{q}+1$

Comme $0<p<q$, pour tout entier $l$ compris entre 1 et $k$, $\frac{1}{p^{l}}>\frac{1}{q^{l}}$ donc $I\left(p^{k}\right)>I\left(q^{k}\right) $.

* Soit p un nombre premier et $a, b$ deux entiers positifs tels que $a<b$. Alors $I\left(p^{a}\right)=\frac{1-\frac{1}{p^{a+1}}}{1-\frac{1}{p}}$

et $I\left(p^{b}\right)=\frac{1-\frac{1}{p^{b+1}}}{1-\frac{1}{p}}$. Comme $p>1$ et$ 0<a<b$, $p^{a+1}<p^{b+1}$ d’où $\frac{1}{p^{a+1}}>\frac{1}{p^{b+1}}$ d’où $1-\frac{1}{p^{a+1}}<1-\frac{1}{p^{b+1}}$

et comme $p>2$, $1-\frac{1}{p}>0$ donc $I\left(p^{a}\right)< I\left(p^{b}\right)$.

On en déduit que le plus petit entier $n$ tel que $I\left(n\right)>2$ doit avoir, dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, des « petits » facteurs premiers, facteurs supérieurs ou égaux à 3 puisque $n$ est impair.

Or, d’après le,b $I\left(p^{k}\right)<\frac{p}{p-1}$ d’où $I\left(3^{a}\right)<\frac{3}{2}$ et $I\left(5^{b}\right)<\frac{5}{4}$ et d’après le c, $I\left(3^{a}5^{b}\right)=I\left(3^{a}\right)I(5^{b})$

donc $I\left(3^{a}5^{b}\right)<\frac{15}{8}<2$. Il est donc nécessaire d’avoir au moins trois nombres premiers distincts dans la décomposition de $n$.

On tente avec la décomposition $n=3^{a}5^{b}7^{c}$ où $a,b,c$ sont les plus petits possibles :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a$$ | $$b$$ | $$c$$ | $$n$$ | $$I(n)$$ |
| 1 | 1 | 1 | 105 | $I\left(n\right)=I\left(3\right)I\left(5\right)I\left(7\right)=\frac{4}{3}×\frac{6}{5}×\frac{8}{7}=\frac{64}{35}$  |
| 2 | 1 | 1 | 315 | $I\left(n\right)=I\left(3^{2}\right)I\left(5\right)I\left(7\right)=\frac{13}{9}×\frac{6}{5}×\frac{8}{7}=\frac{208}{105}$  |
| 3 | 1 | 1 | 945 | $I\left(n\right)=I\left(3^{3}\right)I\left(5\right)I\left(7\right)=\frac{40}{27}×\frac{6}{5}×\frac{8}{7}=\frac{128}{63}$  |

On constate que $I\left(945\right)<2$ et on peut vérifier que 945 est bien le plus petit entier $n$ impair dont l’index d’abondance est strictement inférieur à 2.

En effet :

* on a vu qu’il est nécessaire de se limiter aux plus petits facteurs premiers ;
* avec les mêmes facteurs premiers, l’index d’abondance augmente avec les exposants de ces facteurs ;
* si $n$ a quatre facteurs premiers à savoir 3, 5, 7 et 11, alors $n>3×5×7×11$ soit $n>1 155 $;
* si$ n=3^{a}5^{b}7^{c}$ les plus petites valeurs de $n$ sont celles pour lesquelles $a\geq b\geq c$.

**Exercice 3 (Olympiades Internationales 2006)**

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : (i)  $\hat{PBA}+\hat{PCA}=\hat{PBC}+\hat{PCB}$.

Montrer que $AP\geq AI$ et que l’égalité n’est vérifiée que lorsque $P=I$.

(on pourra s’appuyer sur :

* le théorème dit de l’angle inscrit : la mesure d’un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l’angle au centre interceptant le même arc ;
* son corollaire : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont sur un cercle et du même côté de la droite (AB) alors $\hat{ACB}=\hat{ADC}$ ;
* sa réciproque : si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont tels que $\hat{ACB}=\hat{ADC}$ alors les quatre points sont cocycliques et les points C et D sont du même côté de la droite (AB).

|  |  |
| --- | --- |
| Le point P est à l’intérieur du triangle ABC donc :$$\hat{PBA}+\hat{PCA}=\left(\hat{CBA}-\hat{PBC}\right)+\left(\hat{BCA}-\hat{PCB}\right)=\hat{CBA}+\hat{BCA}-\hat{PBC}-\hat{PCB}$$L’égalité (i) vérifiée par le point P s’écrit donc :$2\left(\hat{PBC}+\hat{PCB}\right)=\hat{CBA}+\hat{BCA}=180°-\hat{BAC}$ (somme des mesures des angles d’un triangle)soit $\hat{PBC}+\hat{PCB}=90°-\frac{1}{2}\hat{BAC}$ soit $180°-\hat{BPC}=90°-\frac{1}{2}\hat{BAC}$ c’est-à-dire $\hat{BPC}=90°+\frac{1}{2}\hat{BAC}$.On constate que la valeur de $\hat{BPC}$ ne dépend pas de P. Or, par définition du point I, $\hat{IBA}+\hat{ICA}=\hat{IBC}+\hat{ICB}$ donc I vérifie (i). |  |

On en déduit que le lieu des points P vérifiant (i) est celui des points P tels que $\hat{BPC}=\hat{BIC}$, c’est-à-dire l’arc du cercle $C$ circonscrit au triangle ABC contenant I (réciproque citée ci-dessus dans l’énoncé).

Pour démontrer que $AP\geq AI$, il suffit alors de prouver que I est le point du cercle $C$ le plus proche de A. Soit S le centre de $C$. Pour tout point P de $C$, $AS\leq AP+PS$ soit $AS\leq AP+IS$ soit $AS-IS\leq AP$.

Montrons que $I\in \left[AS\right]$. $\hat{AIC}+\hat{CIS}=(180°-\frac{1}{2}\hat{CAB}-\frac{1}{2}\hat{ACB})+\frac{1}{2}(180°-\hat{CSI})$ en se plaçant dans le triangle ABC puis dans le triangle CIS isocèle en S. Or, d’après le théorème de l’angle inscrit, $\frac{1}{2}\hat{CSI}=\hat{CBI}$ et, par définition de I, $\hat{CBI}=\frac{1}{2}\hat{CBA}$. Donc $\hat{AIC}+\hat{CIS}=180°+90°-\frac{1}{2}\hat{CAB}-\frac{1}{2}\hat{ACB}-\frac{1}{2}\hat{CBA}=180°+90°-\frac{1}{2}180°=180°$.

On a donc bien $I\in \left[AS\right]$ d’où $AS-IS=AI$ et on en tire $AI\leq AP$, l’égalité n’ayant lieu que si P et I sont confondus.

*(cette solution est tirée du livre Olympiades internationales de mathématiques 2006-2021 aux éditions Cassini)*

**Exercice 4 (Olympiades internationales 2008)**

1. Montrer que pour tous nombres réels $x$, $y$ et $z$ différents de 1 et tels que$ xyz=1$, on a :

$\frac{x^{2}}{\left(x-1\right)^{2}}+\frac{y^{2}}{\left(y-1\right)^{2}}+\frac{z^{2}}{\left(z-1\right)^{2}}\geq 1$.

1. Montrer qu’il existe une infinité de triplets $(x,y,z)$ de nombres rationnels différents de 1 et tels que$ xyz=1$ pour lesquels l’inégalité ci-dessus est une égalité.
2. On pose $a=\frac{x}{x-1}$, $b=\frac{y}{y-1}$ et $c=\frac{z}{z-1}$, ce qui équivaut à $x=\frac{a}{a-1}$, $y=\frac{b}{b-1}$ et $z=\frac{c}{c-1}$.

On est ramené à montrer que si $a, b, c$ sont différents et de 1 et vérifient $abc=(a-1)(b-1)(c-1)$, ce qui s’écrit aussi $abc=abc-ab-bc-ca+a+b+c+1$ soit $ab+bc+ca=a+b+c-1 $, alors

$a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq 1$ .

Or, pour de tels réels, $a^{2}+b^{2}+c^{2}=\left(a+b+c\right)^{2}-2\left(ab+bc+ca\right)=\left(a+b+c\right)^{2}-2\left(a+b+c\right)+1$

Soit $a^{2}+b^{2}+c^{2}=\left(a+b+c-1\right)^{2}+1$.

On en déduit que $a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq 1$ et l’inégalité est une égalité si et seulement si $a+b+c=1$

1. Dans le changement de variable effectué à la question 1, on remarque que $x, y, z$ sont rationnels si et seulement si$ a, b, c $sont rationnels. On se ramène donc à chercher des rationnels $a, b, c$ différents de 1 et tels que $1=a+b+c=1+ab+bc+ca$ ce qui revient au système $\left\{\begin{matrix}a+b+c=1\\ab+bc+ca=0\end{matrix}\right.$

qui s’écrit aussi $\left\{\begin{matrix}a+b=-c+1\\ab=-c\left(a+b\right)=c(c-1)\end{matrix}\right.$. On sait que cela signifie que $a$ et $b$ sont les solutions de l’équation $X^{2}-\left(1-c\right)X+c\left(c-1\right)=0$ , équation dont le discriminant est

$∆=\left(1-c\right)^{2}-4c\left(c-1\right)=(1-c)(1+3c)$.

L’équation et donc le système auront des solutions rationnelles si et seulement si $∆$ est le carré d’un nombre rationnel. On cherche donc deux entiers p et q tels que $c=\frac{p}{q} $ et $∆=\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1+3\frac{p}{q}\right)=\frac{(q-p)(q+3p)}{q^{2}}$soit le carré d’un nombre rationnel.

Pour cela, il suffit qu’il existe deux entiers $u$ et $v$ tels que $q-p=u^{2}$ et $q+3p=v^{2}$ c’est-à-dire $p=\frac{v^{2}-u^{2}}{4}$ et $q=\frac{3u^{2}+v^{2}}{4}$.

Si on pose $u=2n$ et $v=2(n+1)$ où $n$ est un entier naturel non nul alors $u^{2}=4n^{2}$ et $v^{2}=4\left(n+1\right)^{2}$ d’où

$p=\frac{2n+1}{4}$ et $q=\frac{4n^{2}+2n+1}{4}$ d’où $c=\frac{p}{q}=\frac{2n+1}{4n^{2}+2n+1}$ et $∆=\frac{u^{2}v^{2}}{q^{2}}=\left(\frac{4n(n+1)}{4n^{2}+2n+1}\right)^{2}$.

On en tire d’une part $a=\frac{1}{2}\left(1-c+\sqrt{∆}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2n+1}{4n^{2}+2n+1}+\frac{4n(n+1)}{4n^{2}+2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{8n^{2}+4n}{4n^{2}+2n+1}\right)=\frac{2n(2n+1)}{4n^{2}+2n+1}$

Et $a-1=\frac{2n\left(2n+1\right)}{4n^{2}+2n+1}-1=\frac{2n\left(2n+1\right)-\left(4n^{2}+2n+1\right)}{4n^{2}+2n+1}=\frac{-1}{4n^{2}+2n+1}$ d’où $x=\frac{a}{a-1}=-2n(2n+1)$.

D’autre part $b=\frac{1}{2}\left(1-c-\sqrt{∆}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2n+1}{4n^{2}+2n+1}-\frac{4n(n+1)}{4n^{2}+2n+1}\right)=\frac{-2n}{4n^{2}+2n+1}$

Et $b-1=\frac{-2n}{4n^{2}+2n+1}-1=\frac{-2n-4n^{2}-2n-1}{4n^{2}+2n+1}=\frac{-\left(2n+1\right)^{2}}{4n^{2}+2n+1}$ d’où $y=\frac{2n}{\left(2n+1\right)^{2}}$

Enfin $c=\frac{2n+1}{4n^{2}+2n+1}$ d’où $c-1=\frac{2n+1-4n^{2}-2n-1}{4n^{2}+2n+1}=\frac{-4n^{2}}{4n^{2}+2n+1}$ donc $z=\frac{2n+1}{-4n^{2}}$.

(on peut vérifier ses calculs puisqu’avec ces valeurs on a bien $xyz=1$)

Chaque valeur de n donne un triplet solution du problème. Il y a donc bien une infinité de triplets $(x,y,z)$ de rationnels solutions.

*(cette solution est tirée du livre Olympiades internationales de mathématiques 2006-2021 aux éditions Cassini)*

**Exercice 5**

1. Soit $a, b$ et $c$ trois nombres réels strictement positifs tels que : $a+\frac{b}{c}=b+\frac{c}{a}=c+\frac{a}{b}=2$. (R)

Déterminer la valeur de $a+b+c $.

1. Soit $x, y$ et $z$ trois nombres rationnels deux à deux distincts.

Montrer que $\frac{1}{\left(y-z\right)^{2}}+\frac{1}{\left(z-x\right)^{2}}+\frac{1}{\left(x-y\right)^{2}}$ est le carré d’un nombre rationnel.

1. Remarquons déjà que le triplet $\left(1,1,1\right)$ vérifie les relations (R) et qu’alors $a+b+c=3$.

Les relations (R) s’écrivent :

* d’une part $ac+b=2c, ba+c=2a, cb+a=2b$ d’où l’on tire $ac+ba+cb+b+c+a=2(c+b+a)$ soit $a+b+c=ab+bc+ca$ (1)
* d’autre part $acb+b^{2}=2bc, bac+c^{2}=2ca, cba+a^{2}=2ab$ d’où l’on tire $3abc+a^{2}+b^{2}+c^{2}=2(ab+bc+ca)$. (2)

On a de plus, $a^{2}+b^{2}+c^{2}=\left(a+b+c\right)^{2}-2(ab+bc+ca)$ (3)

Enfin, d’après relations (R), $1=\frac{b}{c}×\frac{c}{a}×\frac{a}{b}=(2-a)(2-b)(2-c)$

Soit $1=\left(2-a\right)\left(4-2b-2c+bc\right)=8-4\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)-abc$. (4)

Posons $X=a+b+c$. D’après (1), $X=ab+bc+ca$.

D’après (2), $3abc=2\left(ab+bc+ca\right)-\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)$ soit, d’après (3)

$3abc=2\left(ab+bc+ca\right)-\left(a+b+c\right)^{2}+2\left(ab+bc+ca\right)=4\left(ab+bc+ca\right)-\left(a+b+c\right)^{2}=4X-X^{2}$

D’autre part, d’après (4), $abc=-1+8-4\left(a+b+c\right)+2\left(ab+bc+ca\right)=7-4X+2X=7-2X$

Le nombre X est donc solution de l’équation $\frac{4X-X^{2}}{3}=7-2X$ soit $X^{2}-10X+21=0$. Les solutions de cette équation sont 3 et 7.

Si $a+b+c=7$ alors comme $a+\frac{b}{c}+b+\frac{c}{a}+c+\frac{a}{b}=6$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}=6-7=-1$ ce sui est impossible pour des nombres tous strictement positifs.

On a vu qu’en revanche il était possible d’obtenir $a+b+c=3$ qui est donc la seule valeur pour $a+b+c$.

1. Posons $a=\frac{1}{y-z}, b=\frac{1}{z-x}, c=\frac{1}{x-y}$.

Alors $ab+bc+ca=\frac{1}{(y-z)(z-x)}+\frac{1}{(z-x)(x-y)}+\frac{1}{(x-y)(y-z)}$

Soit $ab+bc+ca=\frac{1}{(x-y)(y-z)(z-x)}\left(\left(x-y\right)+\left(y-z\right)+((-x)\right)=0$

En reprenant l’égalité (3) de la question précédente, on en déduit que $a^{2}+b^{2}+c^{2}=\left(a+b+c\right)^{2}$

C’est-à-dire $\frac{1}{\left(y-z\right)^{2}}+\frac{1}{\left(z-x\right)^{2}}+\frac{1}{\left(x-y\right)^{2}}$ est le carré du nombre rationnel $\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}$.