|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Modèles possibles pour la disposition des fleurons de l’inflorescence d’une composée | C:\Documents and Settings\pmichalak\Mes documents\Mes images\logo_INRIA.pnglogouvsq.png |

***Stage préolympique ouvert aux lycéens de première***

***désignés par leurs établissements, les 19 et 20 décembre 2016***

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***

**« Quelle irritation, quelle frustration quand on est occupé à chercher la solution, le regard dans le vide et l’air stupide, l’esprit occupé par toutes ces pensées contradictoires qui courent à 100 à l’heure ou au contraire tournent en rond. Il s’en passe de belles, alors, dans le cerveau ! « Ça me dit quelque chose… » « Ah c’est bien sûr… » « J’y ai déjà réfléchi pendant une heure » « Vraiment je ne vois pas » « Et si… » « Non ce n’est pas possible ! » « Je suis sûr qu’il y a une faute dans l’énoncé ! » « Enfin, c’est inconcevable, comment se… » «  Ah c’est incroyable comme je suis crétin ! » « Mais ce type a l’esprit tordu ! » « Pourquoi bon sang est-ce que je perds mon temps sur cette histoire ? » « Je suis SÛR qu’il y a une faute dans l’énoncé ! »**

**Pourquoi on perd ainsi son temps ? Parce que l’on se sent si fier quand on a résolu l’énigme sans jeter un coup d’œil à la solution ; mais aussi parce que l’on se sent si bien, malgré la frustration, quand on est en train de chercher ! »**

**Cédric VILLANI, Préface du livre « *Énigmes mathématiques corrigées »* G. et C. Deslandes, Éditions Ellipses 2014**

La Pépinière académique de mathématique organise depuis dix ans, bénévolement, des regroupements d’élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.

La Pépinière s’est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l’université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Saclay-Île-de-France, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, le collège Jean-Philippe Rameau de Versailles. Elle a reçu le soutien de l’Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l’éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. **Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.**

**Le secrétariat opérationnel :** Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

**Les inspecteurs :** Anne ALLARD,Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Thierry ICHELMANN, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

**Les intervenants professeurs :** Pierre BORNSZTEIN (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Dominique CLÉNET  (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Hélène COCHARD (Lycée Blaise Pascal, ORSAY), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Michelle JACCOTTET (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES), Konrad RENARD (Lycée Arthur Rimbaud, GARGES LES GONESSE)

**Professeurs accompagnants :** Jeanne ALLEMAND (Lycée Madeleine Daniélou, RUEIL MALMAISON), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L’ÉCOLE), Cécile GOISNARD (Lycée Richelieu, RUEIL MALMAISON), Claire ROUSSENALY (Lycée Mansart, SAINT CYR L’ÉCOLE), Fahd SOUSSI (Lycée Eugène Ionesco, ISSY LES MOULINEAUX)

***Emploi du temps***

**Lundi 19 décembre 2016**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1** | **Groupe 2** | **Groupe 3** |
| **10 heures** | **Graphes****PB + HC** | **Équations****KR + TI** | **Angles et distances****NF + CW** |
| **11 h 50** | **Film Alan TURING (30 minutes)****Film d’animation : Dimensions chapitres 5 et 6 (30 minutes)** |
| **13 heures** | **Repas** |
| **13 h 50** | **Angles et distances****NF + CW** | **Graphes****PB + HC** | **Équations****KR + TI** |
| **15 h 20** | **Équations****KR + TI** | **Angles et distances****NF + CW** | **Graphes****PB + HC** |

**Mardi 20 décembre 2016**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Groupe 1** | **Groupe 2** | **Groupe 3** |
| **10 heures** | **Nombres** **et dénombrement****CD + HC** | **Aires et volumes****DC + XG** | **Suites et fonctions****SM + MJ** |
| **11 h 50** | **Exposé : Mathématiques du tournesol et de la pomme de pin** |
| **13 heures** | **Repas** |
| **13 h 50** | **Suites et fonctions****SM + MJ** | **Nombres** **et dénombrement****CD + HC** | **Aires et volumes****DC + XG** |
| **15 h 20** | **Aires et volumes****DC + XG** | **Suites et fonctions****SM + MJ** | **Nombres** **et dénombrement****CD + HC** |

**Thème : Suites et fonctions**

**1. Et en plus, elle est périodique ?**

La fonction $f$, fonction bornée de **R** vers **R**, vérifie la condition suivante :

Pour tout réel $x$, $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x\right)+f\left(x+\frac{5}{6}\right)$

Montrer que $f$est périodique.

**2. Degré 5**

La fonction $f$ est une fonction polynôme de degré 5, qui vérifie les égalités :

$$f\left(1\right)=0, f\left(3\right)=1, f\left(9\right)=2, f\left(27\right)=3, f\left(81\right)=4, f\left(343\right)=5$$

Dans l’écriture canonique de $f$, quel est le coefficient du terme de degré 1 ?

**3. Conservation du produit**

Une fonction $f$, définie sur **N**, vérifie : pour tous entiers $m$ et $n$, $f\left(mn\right)=f\left(m\right)f\left(n\right)$. Cette fonction est de plus strictement croissante. On pose $a=f\left(2\right)$ et on suppose $a>$2. Quelle est la plus petite valeur entière possible de $a $?

**4. Télescopage**

Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 : $1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+…+\frac{1}{\left(n-1\right)^{2}}+\frac{1}{n^{2}}<\frac{5}{3}$

**5. Drôle de fonction**

La fonction $f$ est définie sur [0, 1], elle est croissante et satisfait aux deux propriétés :

1. Pour tout $x\in \left[0, 1\right]$, $f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{f\left(x\right)}{2}$

2. Pour tout $x\in \left[0, 1\right]$, $f\left(1-x\right)=1-f\left(x\right)$

Déterminer les images par $f$ de $\frac{1}{13}$ et de $\frac{441}{2017}$

**6. Une équation fonctionnelle**

Trouver les fonctions $f$ de **Z** dans **Z** pour lesquelles, pour tout entier relatif $x$, $f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)-f\left(y\right)-1$

**Thème : Angles et distances**

**1. Pythagore est partout**

Le point D, intérieur au triangle équilatéral ABC, est tel que $\hat{ADC}=150°$. Prouver que $BD^{2}=AD^{2}+DC^{2}$.

**2. 1234567**

On considère un carré ABCD de côté 1234. Sur le côté [CD], on place le point E tel que CE = 567. Le carré CEFG est construit, à l’extérieur du carré ABCD. Le cercle circonscrit au triangle ACF recoupe [BC]en H. Quelle est la distance CH ?

**3. Un rayon connu**

On considère un parallélogramme ABCD et deux cercles de même rayon *R*, l’un passant par les points A et B, l’autre par les points B et C. Ces deux cercles ont en commun les points B et E. On suppose que le point E n’est pas un sommet du parallélogramme. Montrer que le rayon du cercle circonscrit au triangle ADE est aussi *R*.

****

**4. Les vertus du cercle exinscrit**

1. On considère un triangle ABC et un point P intérieur à ce triangle. Comment construire un cercle passant par P et tangent aux demi-droites [AB) et [AC) ?

2. Une droite passant par P rencontre les demi-droites [AB) et [AC) en Q et R. Quel est le minimum du périmètre du triangle AQR ?

**5. Équidistances**

Quatre points du plan, A, B, C et D sont tels que les distances AB, AC, AD, BC, BD et CD ne prennent que deux valeurs $a et b$ (dire pourquoi elles ne peuvent être toutes égales). Quels sont les rapports $\frac{a}{b}$ possibles ?

**6. Grand angle**

La rectangle ABCD est tel que AB = 2 et BC = 1. On choisit au hasard un point P sur le segment [CD]. Quelle est la probabilité que l’angle $\hat{APB}$ soit le plus grand des angles du triangle APB

**Thème : Nombres et dénombrement**

**1. Un, deux, trois**

Le plateau genre « Sudoku » ci-contre doit être complété : les cases vides seront remplies avec les symboles 1, 2 ou 3, de sorte que sur toute diagonale comportant un nombre de cases multiple de 3 on trouve autant de cases marquées 1, marquées 2 ou marquées 3.

**2. On n’arrête pas le progrès (*Olympiades internationales des métropoles – Moscou septembre 2016*)**

Chaque année, le *Groupe des économistes optimistes* publie un rapport fondé sur $n$ indicateurs. Pour chaque indice $i$, le $i$-ème indicateur prend une valeur entière comprise entre 1 et un certain entier $a\_{i}$. Les $a\_{i}$ sont tels que $\sum\_{i=1}^{i=n}\frac{1}{a\_{i}}\leq \frac{1}{2}$.

Le rapport annuel conclut dans le sens du progrès chaque fois que $n-1$ indicateurs au moins ont une valeur supérieure à celle qu’ils avaient l’année précédente. Montrer qu’il est possible de « progresser » indéfiniment.

**3. Liberté de la presse**

Neuf journalistes assistent à une conférence. Chacun d’eux parle au maximum trois langues, et toute paire prise parmi les neuf possède une langue commune. Montrer qu’il existe une langue commune à au moins cinq d’entre eux.

**4. Un très grand nombre**

Soit $N=2^{5}+2^{5^{2}}+2^{5^{3}}+…+ 2^{5^{2016}}+2^{5^{2017}}$ Quels sont les deux derniers chiffres de l’écriture décimale de $N? $

**5. Loto**

Des jetons marqués des nombres entiers de 1 à $N$ sont répartis dans deux sacs. On tire un jeton d’un sac et on le met dans l’autre. La moyenne des numéros des jetons du premier sac et la moyenne des numéros des jetons du second sac augmentent l’une et l’autre de $x$. Quelle est la plus grande valeur possible de $x $?

**6. Un sept, ça se trouve, mais deux…**

Deux entiers positifs $x et y$ sont tels que $x+y$ est un multiple de 7. Montrer que $x^{7}+y^{7}$est un multiple de 49.

**7. Combien de milieux ?**

On considère l’ensemble S des points dont les trois coordonnées, entières, vérifient

$$0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 3, 0\leq z\leq 4$$

À chaque paire de points pris parmi ceux-ci on associe son milieu. Quelle est la probabilité que, deux points étant choisis au hasard dans S, leur milieu soit un élément de S ?

On commencera par rappeler le nombre de façons de choisir une paire dans un ensemble à $n$ éléments.

**8. Image subliminale**

Les trois couleurs primaires, rouge, vert et bleu sont utilisées pour colorer chaque pixel d’un écran (assez grand…). Monter qu’il existe un rectangle dont les quatre pixels-sommets sont de la même couleur.

**Thème : Aires et volumes**

**1. Diagonales isométriques**

Le quadrilatère convexe ABCD est tel que ses diagonales [AC] et [BD] ont pour longueur 1. Son périmètre est $\frac{5}{2}$ . Quelle est, au maximum, l’aire de ce quadrilatère ?

**2. Une apparition de la moyenne quadratique**

On considère un trapèze de bases $a$ et $b$ et de hauteur $h$. Quelle est la longueur du segment parallèle aux bases qui détermine deux trapèzes de même aire ? À quelle distance de la plus grande des bases se situe-t-il ?

**3. Toupie ou soucoupe volante ?**

Un triangle isocèle de périmètre 20 tourne autour de sa base, engendrant un double cône. Quel est le volume maximum de ce double cône ?

****

**4. Élagage d’un parallélogramme**

On donne un parallélogramme ABCD et les milieux respectifs E, F, G et H de ses côtés [AB], [BC], etc. Les points d’intersection des médianes de ce parallélogramme : [AG] avec [HC], [HC] avec [DF], [DF] avec [GB], etc. sont les sommets d’un octogone I J K L M N O P.

Quelle fraction de l’aire du parallélogramme l’aire de l’octogone représente-t-elle ?

**5. Pré pas carré**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A et B de l’axe des abscisses dont les abscisses sont respectivement – 1 et 1. Un point P de l’axe des ordonnées a pour ordonnée le nombre $t$, tel que $0\leq t\leq 1$. Les points situés sur le cercle de centre P passant par A (et B), décrivent une partie du plan. Quelle est l’aire de cette partie ?

**Thème : Équations**

**1. Optimisation**

Si les deux entiers $a$ et $b$ sont tels que $a+b$ est une racine de l’équation $x^{2}+ax+b=0$, quel est le minimum de $ab$ ?

**2. Un phénix**

Un entier *N* est tel que le nombre *M* obtenu en supprimant les trois derniers chiffres de *N* (en écriture décimale) a pour cube *N.* Trouver *N.*

**3. Triplets pythagoriciens** $\left(n, n+1, n+p\right)$

Déterminer les entiers naturels $n$ (inférieur à 1 000) et $p$ (supérieur ou égal à 2) pour lesquels le triangle de côtés $n, n+1 et n+p$ est rectangle.

**4. Trois inconnues**

Peut-on trouver des réels $a, b et c$ tels qu’il existe une fonction $f$ vérifiant, pour tous réels $x et y$ :

$f\left(x+f\left(y\right)\right)=ax+by+c$ ?

**5. Pour ceux qui aiment le calcul littéral (et pour ceux qui le négligent)**

On donne un nombre réel $a$. Résoudre le système d’équations :

$$\left\{\begin{array}{c}x+y+z=a\\x^{2}+y^{2}+z^{2}=a^{2}\\x^{3}+y^{3}+z^{3}=a^{3}\end{array}\right.$$

 **6. Résilience**

Trouver les nombres irrationnels $x$pour lesquels $x^{3}-6x$ et $x^{4}-8x^{2}$ sont des nombres rationnels



