**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2021-2022 Stage « filé »**

**Classe de seconde Fiche numéro 1**

**Parution lundi 8 novembre Retour attendu pour le lundi 22 novembre**

**Exercice n°1 … de l’origine des inégalités**

Définition : on dit qu’un nombre $a$ est inférieur ou égal à un nombre $b$ lorsque $b-a\geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Soit $a, b, c$ et$ d$ des nombres réels

Théorème 1 : si $a\leq b$ alors $a+c\leq b+c$ et si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$.

(si $a\leq b$ alors $b-a\geq 0$ donc, comme $b-a=\left(b+c\right)-(a+c)$, $\left(b+c\right)-(a+c)\geq 0$

soit $\left(b+c\right)\geq (a+c)$)

Théorème 2 :

Si $a\leq b$ et $c\geq 0$ alors $ac\leq bc$

Si $a\leq b$ et $c\leq 0$ alors $ac\geq bc$

Si $0\leq a\leq b$ et$ 0\leq c\leq d$ alors $ac\leq bd$.

Théorème 3 :

Si $0<a\leq b$ alors $\frac{1}{a}\geq \frac{1}{b}>0$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l’un au moins de ces théorèmes.

Démontrer la deuxième partie du théorème 1 ainsi que les théorèmes 2 et 3.

Théorème 1 :

si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $b-a\geq 0$ et $d-c\geq 0$.

Or $\left(b+d\right)-\left(a+c\right)=\left(b-a\right)+(d-c)$. La somme de deux nombres positifs ou nuls est positive ou nulle donc , $\left(b+d\right)-(a+c)\geq 0$ soit $\left(b+d\right)\geq (a+c)$.

Théorème 2 :

Si $a\leq b$ (c’est-à-dire $b-a\geq 0)$ comme $bc-ac=c(b-a)$ alors :

- si $c\geq 0$ alors $c(b-a)\geq 0$ soit $ac\leq bc$

- si $c\leq 0$ alors $c(b-a)\leq 0$ soit $ac\geq bc$

et si $0\leq a\leq b$ et$ 0\leq c\leq d$, alors comme $c\geq 0$, $ac\leq bc$ et comme $b\geq 0$, $bc\leq bd$ d’où $ac\leq bc\leq bd$.

Théorème 3 :

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$ donc si $0<a\leq b$, alors $a-b\leq 0$ et $ab>0$ d’où $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\geq 0$ et $a>0$ soit $\frac{1}{b}\geq \frac{1}{a}>0$.

**Exercice 2 Encadrements**

On considère un rectangle de largeur $l$ et de longueur $L$. On sait que $9,99\leq l\leq 10,01$ et $19,99\leq L\leq 20,01$.

***a.*** Trouver un encadrement du périmètre $P$ du rectangle. Traduire cet encadrement par l’appartenance à un intervalle du type $[a-r,a+r]$.

Préciser l’amplitude de cet encadrement.

***b.*** Trouver de même un encadrement de l’aire $A$ du rectangle. Préciser l’amplitude de cet encadrement.

Peut-on en déduire que $199,7\leq A\leq 200,3$ ?

***a.*** $9,99\leq l\leq 10,01$ et $19,99\leq L\leq 20,01$ . En additionnant membre à membre les inégalités (théorème 1)

$9,99+19,99\leq l+L\leq 10,01+20,01$ soit $29,98\leq l+L\leq 30,02$

Soit, en multipliant par 2 (qui est positif) les deux membres de l’inégalité, $59,96\leq P\leq 60,04$.

Comme $\frac{59,96+60,04}{2}=60$, ceci signifie que $P\in \left[60-0,04, 60+0,04\right]$.

On dit que 60 est une *valeur approchée* de $P$ à la précision 0,04.

L’amplitude de cet encadrement est 0,08.

***b****.* $ 9,99\leq l\leq 10,01$ et $19,99\leq L\leq 20,01$ donc en multipliant membre à membre les inégalités (théorème 2)

$9,99×19,99\leq l×L\leq 10,01×20,01$ soit $199,7001\leq A\leq 200,3001$ .

L’amplitude de cet encadrement est 0,6 ($200,3001-199,7001$).

Pour autant, comme $200,3001>200,3$), on ne peut affirmer que $199,7\leq A\leq 200,3$. On pourrait par exemple avoir $A=200,30005$.

**Exercice 3 Multiples et diviseurs**

Définition : On dit qu’un nombre entier $a$ est un *multiple* d’un nombre entier $b$ s’il existe un nombre entier 𝑘 tel que $a=kb$.

On dit alors que $b$ est un *diviseur* de $a$ ou que $a$ est *divisible* par $b$.

Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d’écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu’il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

On admettra le théorème suivant

Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit $a$ et $b$ deux entiers naturels tels que $b\ne 0$, alors il existe un unique couple $(q,r)$ d’entiers naturels tels que $a=bq+r$ et $0\leq r<b$.

***a.*** Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.

***b.*** Montrer que si l’écriture décimale d’un nombre $A$ est $\overbar{xy}$ et celle d’un nombre $B$ est $\overbar{yx}$ alors le nombre $A+B$ est divisible par 11.

***c.*** Montrer que si l’écriture décimale d’un nombre $A$ est $\overbar{cdu}$ et si $c+d+u=9$ alors le nombre A est divisible par 9.

***d.*** Montrer que pour tous nombres entiers $a$ et $b$, le produit $ab(a^{2}-b^{2})$ est un multiple de 3.

(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de $a$ et $b$ par 3).

***e.*** Montrer que pour tout entier $n$, $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$ est divisible par 2 et par 3.

***f.*** Montrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est un multiple de 48.

***a.*** Un nombre $n $est impair s’il existe un entier $k$ tel que $n=2k+1$. Deux entiers impairs consécutifs peuvent donc s’écrire $2k+1$ et $2k+3$. Leur somme s’écrit $S=2k+1+2k+3=4k+4=4\left(k+1\right).$

On a donc bien un multiple de 4.

***b.*** $A=10x+y$ et $B=10y+x$ d’où $A+B=11x+11y=11(x+y)$ et $A+B$ est un multiple de 11 c’est-à-dire divisible par 11.

***c.*** $A=100c+10d+u=99c+9d+c+d+u=9(11c+d+1)$ donc $A$ est un multiple de 9 c’est-à-dire divisible par 9.

***d.*** Si $a$ ou $b $est multiple de 3, il existe un entier $k$ tel que $ab=3k$ et donc $ab\left(a^{2}-b^{2}\right)=3k\left(a^{2}-b^{2}\right)=3k'$ où $k'$est l’entier $k\left(a^{2}-b^{2}\right)$.

Sinon, les restes dans la division de $a$ et $b$ par 3 sont 1 ou 2, ce qui donne quatre cas à étudier et il suffit pour chaque cas d’avoir un des nombres du produit $a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$ multiple de 3 pour que $ab\left(a^{2}-b^{2}\right)$ soit multiple de 3. S’il existe deux entiers $k$ et $k'$ tels que :

* $a=3k+1$ et $b=3k^{'}+1$ alors $a-b$ est multiple de 3 car $a-b=3(k-k^{'})$
* $a=3k+1$ et $b=3k^{'}+2$ alors $a+b$ est multiple de 3 car $a+b=3(k+k^{'}+1)$
* $a=3k+2$ et $b=3k^{'}+1$ alors $a+b$ est multiple de 3 car $a+b=3(k+k^{'}+1)$
* $a=3k+2$ et $b=3k^{'}+2$ alors $a-b$ est multiple de 3 car $a-b=3(k-k^{'})$

***e.***$ n$ et $n+1$ sont deux entiers consécutifs donc l’un des deux est pair. Le produit $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$ est donc multiple de 2.

On raisonne ensuite comme dans la question précédente en considérant les restes dans la division euclidienne de $n$ par 3. S’il existe un entier $k$ tel que :

* $n=3k$ alors le produit $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$ est multiple de 3 ;
* $n=3k+1$ alors $2n+1=2\left(3k+1\right)+1=3(2k+1)$ et le produit $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$ est multiple de 3 ;
* $n=3k+2$ alors $n+1=3k+2+1=3(k+1)$ et le produit $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$ est multiple de 3.

Dans tous les cas le théorème admis nous permet d’affirmer que le produit $n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$ est multiple de 6.

***f.*** Soit trois nombres pairs consécutifs. Il existe un entier $k$ tel que ces trois nombres s’écrivent $2k-2, 2k, 2k+2$.

Leur produit s’écrit alors $P=8\left(k-1\right)k(k+1)$.

Le produit de deux entiers consécutifs est multiple de 2 puisque parmi les deux il y en a un qui est pair donc $\left(k-1\right)k(k+1)$ est multiple de 2.

De plus, en considérant les restes dans la division euclidienne de $k$ par 3, on montrerait que parmi trois entiers consécutifs, l’un est un multiple de 3 donc $P$ est un multiple de 3.

Comme précédemment, on en déduit que $P$ est un multiple de $8×2×3=48$.

**Exercice 4 Développement décimal d’un nombre rationnel**

Propriété : : soit $a$ et $b$ deux entiers tels que $b\ne 0$. Le développement décimal du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est fini (nombre décimal) ou infini mais périodique à partir d’un certain rang.

On peut procéder par divisions euclidiennes successives :

$a=bq\_{0}+r\_{0} $et $r\_{0}<b$, $10r\_{0}=bq\_{1}+r\_{1} $et $r\_{1}<b$, $10r\_{1}=bq\_{2}+r\_{2} $et $r\_{2}<b$, $10r\_{2}=bq\_{3}+r\_{3} $et $r\_{3}<b$, …

Alors $\frac{a}{b}=q\_{0},q\_{1}q\_{2}q\_{3}….$

***a.*** Expliquer pourquoi il suffit de connaitre le développement décimal de $\frac{22}{7}$ jusqu’à la 7e décimale pour connaitre entièrement ce développement décimal. Déterminer la période « à la main ».

***b.*** Combien de décimales au maximum suffit-il calculer pour connaitre le développement décimal de $\frac{43}{13}$ ?

***a.*** Pour avoir les premières décimales, on procède à des divisions euclidiennes successives par 7, chaque reste devant être strictement inférieur à 7, ce qui donne 7 possibilités (0, 1, …, 6). On finit donc dans le processus par retrouver un reste déjà obtenu et reproduire alors les mêmes calculs :

$22=7×3+1$, $10×1=7×1+3$, $10×3=7×4+2$, $10×2=7×2+6$, $10×6=7×8+4,$ $10×4=7×5+5$, $10×5=7×7+1$, $10×1=7×1+3$ et on reprend les mêmes calculs.

On a donc $\frac{22}{7}=3,142857142857…=3,\overbar{142857}$.

***b.*** En appliquant le même raisonnement, on peut affirmer qu’il suffit d’au maximum 13 décimales pour avoir le développement décimal de $\frac{43}{13}$.

***c.*** On peut montrer qu’en fait le développement décimal de $\frac{43}{13}$ est $3,\overbar{307692}$

**Exercice 5 Racines carrées**

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** $a$ et $b $:

* $\sqrt{a^{2}}=a $;
* $\sqrt{ab}=\sqrt{a}×\sqrt{b}$ . En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a $;
* $\sqrt{a+b}\leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

**1.** Montrer que pour tous réels positifs ou nuls$x, y$, on a $x+y\geq 2\sqrt{xy}.$

En déduire que pour tous réels positifs ou nuls $x, y, z$, on a $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq 8xyz.$

**2.** Montrer que pour tout $k\in \left\{1,2,3,4,5\right\}$, il existe un entier $n$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^{k}=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}.$

**3. *a.*** Montrer que pour tout entier $n$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

***b.*** Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, comparer $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$

***c.*** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{10}$.

***d.*** Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+…+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100$.

**1.** Deux nombres positifs ou nuls sont rangés dans le même ordre que leur carrés (conséquence du théorème « Si $0\leq a\leq b$ et$ 0\leq c\leq d$ alors $ac\leq bd$ »). On compare donc $\left(x+y\right)^{2}$ et $\left(2\sqrt{xy}\right)^{2}$ en étudiant le signe de leur différence :

$\left(x+y\right)^{2}-\left(2\sqrt{xy}\right)^{2}=x^{2}+y^{2}+2xy-4xy=x^{2}+y^{2}-2xy$ car $\left(2\sqrt{xy}\right)=4×\left(\sqrt{xy}\right)^{2}$

Donc $\left(x+y\right)^{2}-\left(2\sqrt{xy}\right)^{2}=\left(x-y\right)^{2}$ qui est un nombre positif ce qui permet d’affirmer que $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.

On a de même $y+z\geq 2\sqrt{yz}$ et z$+x\geq 2\sqrt{zx}$. En multipliant membre à membre les trois inégalités, puisque tous les nombres sont positifs ou nuls, on en déduit que :

$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq 2\sqrt{xy}×2\sqrt{yz}×2\sqrt{zx}$ soit $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq 8\sqrt{x^{2}y^{2}z^{2}} $

C’est-à-dire $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\geq 8xyz$ car $x, y$ et $z $sont positifs ou nuls.

**2.** Pour $k=1$, $1+\sqrt{2}=\sqrt{1}+\sqrt{2}$

Pour $k=2$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}=1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}=\sqrt{9}+\sqrt{8}$

Pour $k=3$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^{3}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=3+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{2}$

Soit $\left(1+\sqrt{2}\right)^{3}=3+2×2+5\sqrt{2}=7+\sqrt{25×2}=\sqrt{49}+\sqrt{50}$.

Pour $k=4$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^{4}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{3}\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=7+$ $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}+5\sqrt{2}\sqrt{2}$

Soit $\left(1+\sqrt{2}\right)^{4}=17+12\sqrt{2}=\sqrt{289}+\sqrt{288}$

Pour $k=5$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^{5}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{4}\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=…=41+29\sqrt{2}=\sqrt{1 681}+\sqrt{1 682}$

**3. *a.*** Pour tout entier $n$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2}-\left(\sqrt{n}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

***b.*** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

Or, comme $n+1>n>n-1\geq 1$, $0<\sqrt{n}+\sqrt{n-1}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ d’où $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

On en déduit que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

***c.*** Comme $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, on est ramené à chercher le plus petit entier naturel $n$ tel que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>10$. Comme $5+5=10$, le plus petit entier naturel $n$ qui convient est $n=25$.

***d.*** Soit $S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+…+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

On peut aussi écrire $S=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+…+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

La plupart des termes se simplifient deux à deux et $S=\sqrt{n+1}-1$

$S\geq 100$ équivaut donc à $\sqrt{n+1}\geq 101$ soit $n\geq 10 200$.