**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2021-2022 Stage « filé »**

**Classe de seconde Fiche numéro 3**

**Parution vendredi 11 février Retour attendu pour le lundi 16 mars**

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

* Le milieu d’un segment est caractérisé par l’une des égalités vectorielles suivantes :

ou ou, pour un point M du plan, .

* La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l’alignement de trois points.
* L’égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
* La relation de Chasles facilite les calculs.

**Exercice 1**

Soit ABCD un quadrilatère. On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1. Montrer que .

On suppose désormais que le quadrilatère ABCD est un trapèze de bases [BC] et [AD]. On note K et L les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

1. Justifier l’existence d’un réel tel que .
2. Exprimer les vecteurs , et en fonction du vecteur .
3. En déduire la valeur de pour laquelle on a .
4. I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]. On a donc et .

La relation de Chasles permet alors d’écrire soit, en introduisant les vecteurs et en fonction desquels on veut exprimer :

.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ABCD est un trapèze de bases [BC] et [AD]. Les vecteurs et sont donc colinéaires ce qui signifie qu’il existe un réel tel que . 2. car I et L sont les milieux respectifs de [AB] et [BD] soit .   On démontre de même que . |  |

Soit, puisque ,

1. si et seulement si soit

**Exercice 2**

Soit ABCD un parallélogramme et soit M et N les points définis par et . On note P le symétrique du point B par rapport à C.

1. Exprimer les vecteurs et en fonction des vecteurs et .
2. Que représente le point N pour le segment [MP] ?

|  |  |
| --- | --- |
| 1. La relation de Chasles permet d’écrire :     Soit . Or ABCD est un parallélogramme soit d’où .  P est le symétrique de B par rapport à C s’écrit  d’où . |  |

1. Il en résulte que . On en déduit que N est le milieu de [MP].

**Exercice 3**

Un repère est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs et sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.

Définition : on dit que deux vecteurs et sont colinéaires s’il existe un réel tel que ou .

Théorème : dans le plan muni d’un repère orthonormé, les vecteurs et sont colinéaires si et seulement si

Définition : dans le plan muni d’un repère orthonormé, le déterminant du couple de vecteurs où et sont les vecteurs de coordonnées respectives et est le nombre .

L’introduction d’un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s’appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème
2. Démontrer que si les vecteurs et sont colinéaires alors
3. Démontrer que les vecteurs et sont tels que alors ils sont colinéaires.

(on pourra traiter à part le cas où l’un au moins des vecteurs est nul)

1. Application

Soit ABCD un carré de côté On construit à l’intérieur du carré ABCD le triangle équilatéral ABE et à l’extérieur du carré ABCD le triangle équilatéral CBF. On veut montrer que les points D, E et F sont alignés.

1. Justifier que si on pose et alors est un repère orthonormal.
2. Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère.
3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.
4. a. Si et sont colinéaires, alors il existe un réel tel que ou . Si alors d’où . Par symétrie, si alors .
5. Si et sont tels que alors :

* Soit l’un des vecteurs est nul : si alors 0 et si alors 0 donc et sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)
* Soit aucun des vecteurs n’est nul. Comme , on a ou . Si , comme , si on pose alors et . Sinon, et en posant , l’égalitédonne et on retrouve .

Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs et sont colinéaires.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. a. Comme ABCD est un carré de côté , les vecteurs et sont à la fois orthogonaux et de norme 1 donc est un repère orthonormal. 2. Dans ce repère, . On a donc .   ABE est un triangle équilatéral et situé à l’intérieur du carré ABCD donc l’ordonnée de E est positive et vaut EK où K est le milieu de [AB] et son abscisse est celle de K c’est-à-dire .  La hauteur d’un triangle équilatéral de côté vaut (se retrouve en |  |

appliquant le théorème de Pythagore au triangle AKE rectangle en K). On a donc

Le triangle CBF est équilatéral et situé à l’extérieur du carré ABCD donc, en utilisant le calcul précédent de la hauteur d’un triangle équilatéral, on a .

1. Dans le repère orthonormal , les points D, E et F sont alignés si et seulement si le déterminant du couple de vecteurs est nul.

Or on a et . Donc

Soit

Les points D, E et F sont donc bien alignés.

**Exercice 4**

Définition : un point M’ est le symétrique d’un point M par rapport à une droite lorsqu’il est sur cette droite ou lorsque la droite est la médiatrice du segment [MM’].

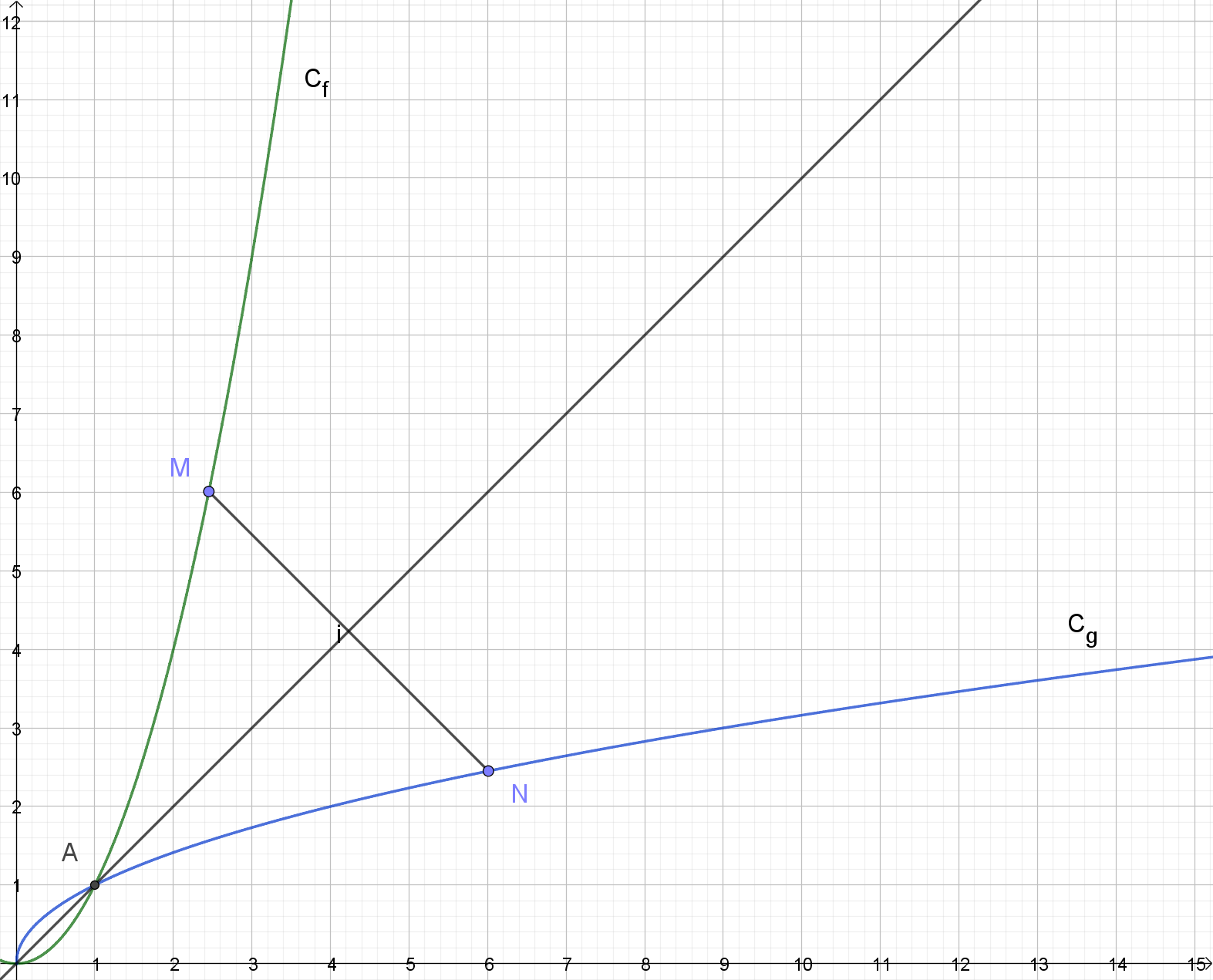
Définition : la courbe représentative d’une fonction est l’ensemble des points où x prend toutes les valeurs pour lesquelles existe (ensemble de définition de la fonction)

Soit et les fonctions définies sur par et . On note et les courbes représentatives respectives de et dans un repère orthonormal

1. Tracer et et déterminer leurs points d’intersection. On notera A celui d’abscisse strictement positive.
2. Soit un réel positif ou nul, M le point de d’abscisse et N le point de d’abscisse . Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA).
3. Que peut-on en déduire pour les courbes et ?
4. L’abscisse du point d’intersection A des deux courbes représentatives et , s’il existe, est solution de l’équation

soit ( et ) soit (car l’égalité entraine )  soit ou .

Il n’y a donc que deux points d’intersection : l’origine O du repère et le point A.



1. Soit un réel positif. M est le point de d’abscisse et N est le point de d’abscisse . On a donc et (car si , alors ).

Si M est sur la droite (OA) alors M = O ou M = A et dans les deux cas N = M car alors .

Si M n’est pas situé sur la droite (OA), alors montrons que cette droite est la médiatrice de [MN] en montrant que les points O et A sont tous les deux équidistants de M et N.

On a et donc

et .

La droite (OA) est donc bien la médiatrice de [MN].

1. est l’ensemble des points M lorsque prend toutes les valeurs positives ou nulles. Le symétrique N du point M par rapport à, la droite (OA) est alors un point de . Réciproquement, pour tout point de tel que et si on pose alors et Q est le symétrique du point de .

On peut donc affirmer que les courbes et sont symétriques par rapport à la droite (OA).

**Exercice 5**

Définition : on dit qu’une fonction admet un minimum (respectivement un maximum) en sur un ensemble lorsque pour tout réel de , (respectivement . Le nombre est alors le minimum (respectivement maximum) de sur.

Définition : une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur un **intervalle I** lorsque pour tous réels et de I, si alors (respectivement ).

On rappelle que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence de ces deux nombres.

On considère un rectangle ABCD tel que et . On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle façon que .

On pose et l’aire du quadrilatère MNPQ.

1. Préciser l’intervalle dans lequel varie et exprimer en fonction de.
2. Déterminer les réels et tels que pour tout , montrer que .
3. Déterminer pour quelle valeur de cette aire est minimale et la valeur de ce minimum.
4. Déterminer les variations de la fonction sur l’intervalle déterminé au a.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Les points M, N, P et Q seront bien respectivement sur les segments [AB], [BC],[CD] et [DA] si et seulement si et c’est-à-dire .   L’aire du quadrilatère MNPQ est celle du rectangle ABCD à laquelle on retranche la somme des aires des triangles rectangles MBN, NCP, PDQ et QAM  Soit  Soit . |  |

1. On peut aussi écrire .
2. Pour tout réel , donc en multipliant par 2>0, et ce qui signifie que 28 est le minimum de la fonction sur et que ce minimum est atteint en 4.
3. La question précédente donne l’idée de conjecturer que la fonction est décroissante sur [0,4] et croissante sur [4,6].

**Pour tous réels et**  de tels que .

Alors

Soit .

Comme , a le signe de .

Si et deux réels de , alors et donc et .

Si et deux réels de , alors et donc et .

On en déduit que la fonction est décroissante sur [0,4] et croissante sur [4,6].

**Exercice 6**

Pour montrer que deux nombres et sont égaux, on peut montrer que .

Pour tous nombres réels et tels que et ,équivaut à .

On considère quatre nombres réels tels que .

Démontrer que : (i) (ii)

(On se place dans la situation où tous ces quotients sont bien définis.)

équivaut à .

1. Montrons que , ce qui équivaut à

Posons soit, puisque , .

On a donc bien .

1. Montrons maintenant que , ce qui équivaut à .

Posons

Soit

Soit, comme ,

On a donc bien .