**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2022-2023 Stage « filé »**

**Classe de troisième Fiche numéro 2**

**Parution lundi 6 février Retour attendu le jeudi 9 mars**

**Exercice 1 – Multiples et diviseurs**

Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. Dire que est l’écriture décimale de l’entier, c’est dire que .

On convient que cette écriture a deux chiffres si .

Définition : on dit qu’un entier est multiple d’un entier s’il existe un entier tel que .

Définition : on dit qu’un entier naturel non nul est un nombre premier lorsqu’il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Propriété : tout entier naturel s’écrit de manière unique à l’ordre près comme produit de nombres premiers.

1. Démontrer que si et sont respectivement le chiffre des dizaines et celui des unités d’un nombre entier naturel alors ce nombre est divisible par 4 si et seulement si est un multiple de 4
2. Déterminer les entiers naturels tels que soit un multiple de .

(On pourra remarquer que )

1. **a.** Décomposer le nombre 385 en produit de nombres premiers et déterminer le nombre de ses diviseurs (en comptant 1 et lui-même).

**b.** Déterminer le plus petit entier naturel ayant le même nombre de diviseurs que 385.

1. Si et sont respectivement le chiffre des dizaines et celui des unités de , alors .

Si est divisible par 4 alors il existe un entier tel que d’où . Comme est un entier, est un multiple de 4.

Réciproquement, si est un multiple de 4, alors il existe un entier tel que d’où et comme est un entier, est un multiple de 4.

1. Si le nombre est un multiple de alors il existe un entier tel que

d’où, comme , soit . Le nombre est donc un diviseur de 12 soit soit .

Réciproquement, si  , alors est un diviseur de 12 et, par somme aussi de c’est-à-dire de .

1. **a.** . Les diviseurs de 385 sont donc 1, 5, 7, 11, 35, 55, 77 et 385.
2. 385 a exactement 8 diviseurs. Tout entier naturel a une décomposition en facteurs premiers. Tout diviseur de a sa décomposition constituée des mêmes facteurs premiers à une puissance inférieure ou égale à celle dans la décomposition de (puissance pouvant être nulle). Il reste à prendre les facteurs premiers les plus petits possibles (parmi 2, 3 ou 5). Comme , le plus petit entier ayant 8 diviseurs sera le plus petit des deux nombres et à savoir le nombre 24.

**Exercice 2 – Fractions irréductibles**

Définition : soit et deux entiers naturels tels que . On dit que la fraction est irréductible lorsque et n’ont pas d’autre diviseur commun que 1.

Soit et deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que . Déterminer les entiers naturels et tels que la fraction soit irréductible et ait pour carré la fraction .

On cherche deux entiers naturels et tels que tels que ce qui signifie qu’il existe un entier naturel non nul tel que et . Comme et ne doivent pas avoir de diviseur commun autre que 1, nécessairement . On a alors soit, puisque et sont positifs, . Les diviseurs de 14 sont 1, 2, 7, 14. Les couples possibles sont donc . Comme et sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, et sont eux-mêmes supérieurs ou égaux à 2 et les fractions irréductibles solutions sont donc .

**Exercice 3 – Calcul littéral**

Propriété : pour tous nombres et , .

Cette propriété est à la base de tous les développements dans le calcul littéral, notamment pour démontrer que pour tous nombres et , et .

Dans un problème concret faisant intervenir une ou plusieurs variables, il ne faut pas oublier de préciser dès le départ les contraintes concernant ces variables, par exemple une distance doit être positive.

1. **a.** Démontrer que pour tous nombres et , .

**b**. En déduire, sans utiliser une calculatrice et en expliquant le calcul, la valeur de .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. On considère un carré ABCD et un triangle AED rectangle en E, extérieur au carré comme sur la figure ci-contre.   On suppose que et , où est un entier naturel non nul.   1. Exprimer l’aire du carré ABCD en fonction de . 2. Si on augmente les distances AE et ED de 1, exprimer en fonction de l’augmentation de l’aire du carré ABCD. 3. Existe-t-il une valeur de pour laquelle est égale à 8 ? 4. Existe-t-il une valeur de pour laquelle est égale à 18 ? |  |

1. **a.** Pour tous nombres et , soit, après simplification .
2. 80
3. **a.** En appliquent le théorème de Pythagore dans le triangle AED rectangle en E, on obtient :

. L’aire du carré ABCD est donc égale à .

**.** Si on augment de 1 les distances AE et ED, l’aire du carré ABCD devient :

. L’augmentation d’aire est donc :

1. équivaut à soit . Comme est un entier naturel non nul, il n’existe pas de valeur en telle que .
2. équivaut à soit .

**Exercice 4 – Approximation de**

Dans les calculs avec des fractions, on s’appuie sur les propriétés suivantes :

Pour tout nombre et tous nombres non nuls :

, , , .

Définition : soit et deux nombres. Le nombre est une valeur approchée du nombre à 0,0001 près lorsque

Soit , et les nombres définis par , et .

1. Ecrire les nombres et comme quotients de deux entiers.
2. Quel est le résultat affiché par la calculatrice pour les nombres et ?
3. Proposer un nombre rationnel (quotient de deux entiers) construit sur le modèle des nombres et et qui est une valeur approchée de à 0,0001 près.
4. En réduisant au même dénominateur et en s’appuyant sur les propriétés rappelées ci-dessus :

.

.

1. Pour , la calculatrice affiche .

Pour , la calculatrice affiche .

Pour , la calculatrice affiche .

1. Dans la suite des nombres , on pose .

Pour , la calculatrice affiche qui est inférieur à 0,0001 donc est une valeur approchée de à 0,0001 près.

**Exercice 5 – Triangle rectangle et cercle**

Pour déterminer la nature d’un triangle ou d’un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d’un triangle particulier (isocèle, équilatéral, isocèle) ou d’un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

1. Soit un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle .
   1. Soit D le point diamétralement opposé à C sur . Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
   2. En déduire la nature du triangle ABC.
2. Réciproquement, soit ABC un triangle rectangle en C et soit D le symétrique de C par rapport au milieu I de [AB].
   1. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
   2. En déduire que le segment [AB] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Énoncer les théorèmes démontrés à l’issue des questions 1 et 2.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. a. Puisque [AB] est un diamètre du cercle de centre I, I est le milieu de [AB]. Par définition de D, I est aussi le milieu de [CD]. Le quadrilatère ADBC a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. C’est donc un parallélogramme.   De plus, comme C et A sont deux points de , IA = IC. On en déduit que les diagonales du quadrilatère ADBC ont même longueur.  Au final, le quadrilatère ADBC est un rectangle.   1. Puisque ABDC est un rectangle, ses angles aux sommets sont droits.   En particulier, le triangle ABC est rectangle en C.  *Remarque :* on vient de démontrer que si le cercle circonscrit à un triangle a pour diamètre l’un des côtés du triangle, alors ce triangle est rectangle au |  |

sommet opposé à ce côté.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. a. I est le milieu commun aux segments [AB] et [CD] donc la quadrilatère ADBC est un parallélogramme. De plus, le triangle ABC est rectangle en C, dont le parallélogramme ADBC est un rectangle. 2. Le quadrilatère ADBC est un rectangle donc ses diagonales ont même longueur. Comme I est le milieu de [AB] et [CD], on en déduit que   ID = IC = IA = IB et donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. De plus I étant le milieu de [AB], [AB] est un diamètre de ce cercle.  *Remarque :* on vient de démontrer que le cercle circonscrit à un triangle |  |

rectangle a pour diamètre l’hypoténuse du triangle.

1. Les théorèmes ont été énoncés en remarque.

**Exercice 6 – Calculs d’aires**

|  |  |
| --- | --- |
| Sur la figure ci-contre :  - le quadrilatère ABCD est un carré ;  - le quadrilatère HDJK est un rectangle ;  - le triangle EAD est rectangle en A ;  - le segment [HG] est le diamètre d’un demi-cercle passant par le point A et de centre E ;  - les points G et J sont les extrémités d’un quart de cercle de centre D.  On pose et .   1. Exprimer l’aire du carré ABCD en fonction de et . 2. Exprimer l’aire du rectangle HDJK en fonction de et . 3. Que peut-on dire de ces deux aires ? |  |

1. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AED rectangle en E, d’où le carré ABCD a pour aire .
2. L’aire du rectangle HDJK est égale à .

Comme J et G sont les extrémités d’un quart de cercle de centre D, .

Or le segment [HG] est le diamètre d’un demi-cercle passant par le point A et de centre E donc .

D’où .

D’autre part, . Or le segment [HG] est le diamètre d’un demi-cercle passant par le point A et de centre E donc d’où .

Au final, l’aire du rectangle HDJK est égale à .

1. On constate que les deux aires sont égales.