**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2023-2024 Stage « filé »**

**Classe terminale Fiche numéro 2**

**Parution lundi 18 décembre Retour attendu pour le lundi 15 janvier**

**Exercice 1 – Recherche d’extremum**

Pour étudier la dérivabilité d’une fonction en un point et l’existence d’une tangente à sa courbe, on se ramène parfois à la définition :

Définition : Soit une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit un réel de I. On dit que la fonction   
 est **dérivable** en s'il existe un nombre tel que   
Si cette limite existe mais est infinie, on dit que la fonction n’est pas **dérivable** en mais sa courbe admet une tangente verticale.

Propriété : soit une fonction dérivable sur un intervalle et . La fonction admet un extremum en si et seulement si sa dérivée s’annule **en changeant de signe** en .

Dans le plan muni d’un repère orthonormé , on considère le cercle de centre O et de rayon 1 ainsi que le point I(1,0). Soit un point quelconque de et N son symétrique par rapport à l’axe des abscisses.

On veut déterminer la position du point M telle que l’aire du triangle MNI soit maximale

1. Après avoir exprimé en fonction de , exprimer en fonction de (par symétrie, on pourra se limiter au cas où ).
2. Soit la fonction définie sur par .
   1. Etudier la dérivabilité de la fonction en et en 1. En déduire une équation des tangentes à aux points d’abscisses -1 et 1.
   2. Déterminer le signe de la fonction dérivée de sur l’intervalle et dresser le tableau de variation de la fonction .
   3. Tracer la courbe .
3. Résoudre le problème posé au départ.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit H le projeté orthogonal du point M sur l’axe des abscisses, l’aire du triangle MNI est, par symétrie, le double de l’aire du triangle MHI.   Donc  L’appartenance du point M au cercle se traduit par soit  . Si cette égalité s’écrit d’où .  De plus puisque .  Au final .   1. **a.** Pour étudier la dérivabilité en de , on étudie la limite en 0 du taux |  |

lorsque tend vers 0 en étant positif (pour rester dans ). Comme ,

.

, et donc . On en déduit que la fonction n’est pas dérivable en mais que sa courbe admet au point d’abscisse une tangente verticale.

Pour étudier la dérivabilité en de , on étudie la limite en 0 du taux lorsque tend vers 0 en étant négatif (pour rester dans ). Comme ,

.

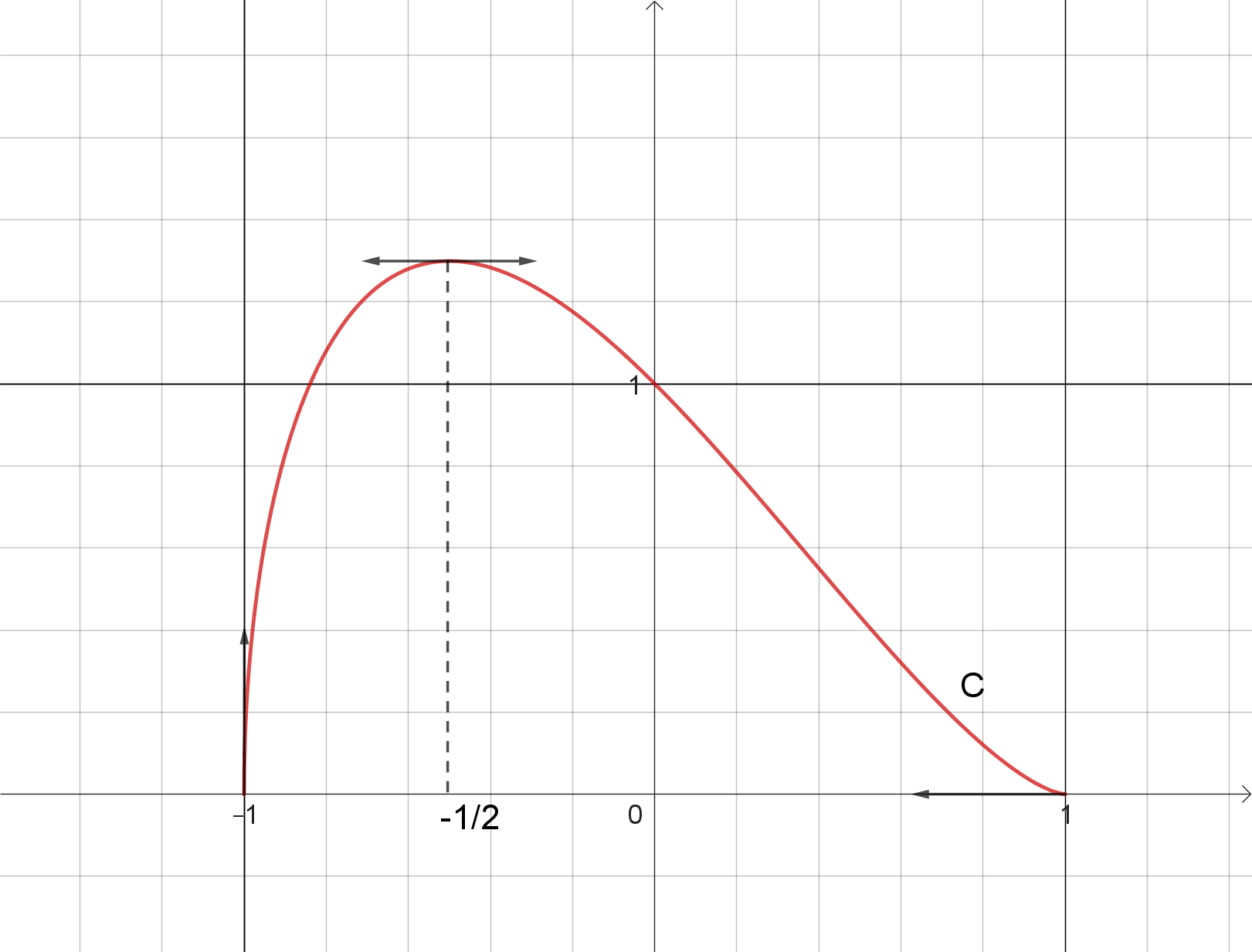
. On en déduit que la fonction est dérivable en 1 et ce qui signifie que sa courbe admet au point d’abscisse une tangente horizontale.

**b.** Sur la fonction est dérivable (par produit et composition) et, pour tout ,

.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Sur , a le signe de car et .  Or si et seulement si .  et  On en déduit le tableau de variation ci-contre. | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | |  | 0 | |  | 0 0 | |

**c.**



1. L’aire , c’est-à-dire la fonction f est maximale lorsque . Cette aire maximale vaut .

*Remarque : l’aire maximale correspond au cas où le triangle MNI est équilatéral. Dans les problèmes d’optimisation, maxima ou minima sont souvent obtenus dans le cas de figures régulières.*

**Exercice 2 – Suites croissantes majorées.**

Définition : On dit qu’une suite (*un*) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel tel que pour tout entier naturel .

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit une suite dont les termes sont positifs ou nuls, majorée par un nombre réel positif .

Pour tout entier naturel , on définit .

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer par récurrence que : .
3. Démontrer que la suite est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite .
5. On considère la suite définie par : pour tout entier naturel , .
6. Vérifier que pour tout entier naturel *n*, .
7. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
8. ; est positif ou nul par hypothèse et , donc ce qui justifie la croissance de la suite .
9. Pour tout entier naturel *,* soit la proposition  : «  ».

Initialisation :

Par convention, et  ; par hypothèse , donc est vérifiée.

Hérédité : Si pour un entier naturel , est vérifiée alors montrons que est encore vérifiée.

 ; par hypothèse de récurrence   et de plus .

Par addition des termes des inégalités de même sens, on obtient : ,c’est-à-dire ce qui est la proposition .

Conclusion : pour tout entier naturel , la proposition est vraie.

1. On utilise la propriété de somme des termes consécutifs d’une suite géométrique de raison :  ; donc **,**   d’où **,**  .

Le nombre réel est un majorant de la suite .

1. La suiteest croissante et majorée, donc converge vers un réel tel que *.*
2. **a.** Si est un entier naturel pair, alors  ; si est un entier naturel impair, alors .

Donc la suite vérifie : pour tout entier naturel , .

**b.** La suite vérifie les hypothèses requises pour conclure d’après la question 4. que la suite est convergente.

 .

donc  ; on en déduit

**Exercice 3 – Suite implicite**

Dans de nombreux exercices, les suites sont définies par une expression dite explicite, une expression algébrique ou une expression contenant des fonctions usuelles. Les termes d’une suite dite implicite n’ont pas d’expression algébrique connue, mais sont définies par une propriété comme, par exemple, être solution d’une équation.

Les connaissances nécessaires pour l’exercice suivant sont les propriétés de l’exponentielle et du logarithme, le théorème des valeurs intermédiaires et ses divers corollaires, et des théorèmes sur les limites de suites.

Pour tout entier naturel non nul, soit la fonction définie dans par .

On désigne par la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer qu’il existe un unique point A du plan, indépendant de l’entier , appartenant à toutes les courbes .
2. Montrer que la fonction admet en une limite que l’on déterminera.
3. Montrer que la fonction admet en une limite que l’on déterminera.
4. Établir le tableau des variations de la fonction .
5. **a.** Exprimer en fonction de l’entier naturel , le minimum de la fonction .
   1. Montrer que la suite () est convergente et préciser sa limite.
   2. Montrer que : .
6. Démontrer que l’équation admet dans **R** exactement deux solutions, l’une strictement positive que l’on notera , l’autre négative que l’on notera .
7. **a.**  Démontrer que : .
   1. En déduire que la suite () est décroissante.
8. **a.** Justifier que la suite () est convergente.
   1. Montrer que (on pourra raisonner par l’absurde).
9. Raisonnons par analyse et synthèse : s’il existe un point A commun à toutes les courbes , alors ce point A appartient aux courbes et Etudions les points d’intersection de et . Leurs abscisses sont les solutions de l’équation soit qui équivaut à soit, puisque , c’est-à-dire .

De plus . Le point A est donc le seul point commun aux courbes et .

Etudions si A appartient à toutes les courbes  : , donc A .

Conclusion : il existe un unique point, le point A appartenant à toutes les courbes .

1. donc ; or donc . De plus . On en déduit .
2. On se trouve en présence d’une indétermination de type somme : et

. donc Or donc

On en déduit successivement :  ;  ;

On en déduit .

1. , est dérivable par opérations sur des fonctions dérivables et .

par stricte croissance de la fonction ln sur

Tableau des variations de :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 |
|  |  |

1. **a.** D’après le tableau des variations,

**b.** et donc par somme

* 1. Etudions les variations de la fonction définie sur l’intervalle par .

est dérivable et

. La fonction est donc décroissante sur l’intervalle  ; par conséquent, avec .

On en conclut que pour tout entier naturel non nul, est strictement négatif.

1. On vérifie les conditions d’application du théorème des valeurs intermédiaires :

Sur l’intervalle , la fonction est continue, strictement décroissante et .

Donc l’équation admet une unique solution notée dans l’intervalle .

Sur l’intervalle , la fonction est continue, strictement croissante et .

Donc l’équation admet une unique solution notée dans l’intervalle .

De plus donc . Dans l’intervalle , car et croissante donc et par suite .

1. **a.** Soit .

donc la différence a le signe de . Puisque et par stricte croissance sur de la fonction exponentielle, et par suite .

Donc .

**b.** Soit donc en lui appliquant l’inégalité précédente c’est-à-dire .

Or , donc . Puisque la fonction est strictement croissante sur , on en déduit que ce qui signifie que la suite () est décroissante.

1. **a.** On a démontré que la suite () est décroissante et minorée par 0. Donc d’après le théorème de la convergence monotone, la suite () converge vers une limite telle que .

**b.** . On veut prouver que ; raisonnons par l’absurde en supposant .

Puisque la suite () est décroissante, et par croissance de la fonction sur l’intervalle , on en déduit que d’où .

Or . Puisque , donc par composition,

ce qui conduit à .

Par définition d’une limite égale à , il existe un rang *n0* à partir duquel tous les termes vérifient > 0, ce qui contredit . On prouve ainsi que .

**Exercice 4 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien**

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.

On sait que pour tous nombres strictement positifs et , et .

On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions dérivables sur et telles que pour tous nombres réels et :

1. .
2. Calculer
3. Pour tout nombre réel , on considère la fonction définie sur par où est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction  ?
4. Montrer que g est dérivable sur et exprimer .
5. Si on pose montrer que pour tout nombre réel , .
6. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.
7. Si on écrit l’égalité (1) pour , on obtient d’où .
8. D’après l’égalité (1), pour tout réel , donc est une fonction constante.
9. Comme somme et composition de fonctions dérivables sur , la fonction est dérivable sur et pour tout , on a .
10. Comme est une fonction constante, on en déduit que pour tout réel ,

En particulier, pour tout nombre réel soit, si on pose .

La fonction a donc même dérivée que la fonction . Or , on en déduit que

1. Si on a de plus alors soit et est la fonction logarithme népérien.

**Exercice 5 – Propriétés des combinaisons**

Propriétés :

(1) pour tous entiers et tels que ,  ;

(2) pour tous entiers et tels que , .

(3) pour tout entier , pour tous réels et ,

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d’autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier ,

(ii) (iii)

***a.*** Démontrer par récurrence la relation (i) en s‘appuyant sur les propriétés (1) et (2).

***b.*** Démontrer la relation (ii) en s’appuyant sur la propriété (3).

***c.*** Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.

***d.*** En considérant la dérivée de la fonction , démontrer que pour tout entier ,

.

***a.*** Pour , l’égalité est vraie puisqu’elle s’écrit .

Si l’égalité est vraie au rang , alors

Soit, en s’appuyant sur la propriété (2) :

Or et

D’où

D’après l’hypothèse de récurrence, on a donc

Et l’égalité est encore vraie au rang donc pour tout entier .

***b.*** En s’appuyant sur la propriété (3), .

*Remarque : cette méthode est aussi valable pour démontrer l’égalité (i).*

correspond au nombre de tirages de boules dans une urne contenant boules noires et boules blanches.

Chacun de ces tirages peut être constitué de boules noires et boules blanches, variant de 0 à .

Pour fixé, il y a façons de tirer les k boules noires et façons de tirer les boules blanches donc il y a tirages de ce type. D’après la propriété (1), ce nombre s’écrit aussi .

D’où.

***d.*** Soit la fonction définie sur **R** par . Cette fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel , on a et on a alors .

D’autre part, d’après la propriété (3),

d’où et, en particulier, .

On a donc bien .

**Exercice 6 – Fonction vectorielle de Leibniz**

L’objectif de cet exercice est d’étudier une fonction vectorielle, dite de Leibniz, et la notion de barycentre ainsi que ses applications à la géométrie (points alignés, droites concourantes).

Définition : Soit points du plan notés et réels notés . On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* la fonction qui à tout point M du plan associe le vecteur :

**Partie A – Cas général**

1. **a**. On pose . Montrer que si est un point fixé du plan alors, pour tout point du plan,

.

* 1. Démontrer que si , alors il existe un unique point du plan tel que .

Ce point est alors appelé le barycentre des points pondérés et on appelle masse du système de ces points pondérés la somme de leurs coefficients.

1. **a**. Exprimer le vecteur en fonction des vecteurs pour .
   1. Soit un triangle, construire, s’ils existent, le barycentre des points pondérés , le barycentre des points pondérés et le barycentre des points pondérés

.

1. Montrer que si est un réel non nul et si est le barycentre des points pondérés

alors est aussi le barycentre des points pondérés .

On admet la propriété dite *d’associativité du barycentre* : le barycentre de points pondérés ne change pas lorsqu’on remplace d’entre eux, dont la somme de leurs coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté du coefficient .

Grâce à des regroupements judicieux de points pondérés, cette propriété permet de démontrer que des droites sont concourantes ou que des points sont alignés.

**Partie B – Cas particuliers**

1. Soit et deux réels tels . Montrer que si est barycentre des points pondérés et , alors est aligné avec et .
2. Trouver deux réels et tels que le milieu d’un segment [AB] soit le barycentre des points pondérés et . Les réels et sont-ils uniques ?
3. Soit un triangle. Soit , et les milieux respectifs des segments et et soit le barycentre des points pondérés . En utilisant la propriété d’associativité du barycentre, retrouver le fait que les médianes du triangle sont concourantes.
4. Soit un triangle. On considère le point défini par , et les points et, milieux respectifs de et . Montrer que le point est aligné avec les points et.

**Partie A**

1. **a.** Soit un point du plan. D’après la relation de Chasles,

* 1. équivaut, d’après la question précédente, à soit .

Comme , cela s’écrit . et sont fixés donc il existe bien un unique point du plan tel que .

1. **a.**  s’écrit

soit

soit

soit, puisque , .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. et 4 donc le barycentre existe et, d’après la question précédente, , ce qui permet de construire le point .   et donc le barycentre existe et, d’après la question précédente,  , ce qui permet de construire le point . |  |

et donc le barycentre existe et, d’après la question précédente,

, ce qui permet de construire le point .

1. Si est un réel non nul et si est le barycentre des points pondérés alors

. Or, donc le point est aussi le barycentre des points pondérés .

**Partie B**

1. Si est barycentre des points pondérés et , alors, d’après la question A.2.a., . On en déduit que les vecteurs et sont colinéaires et donc est bien aligné avec et .
2. Le point est le milieu de lorsque . On cherche donc et tels que soit soit . On peut prendre mais il y a une infinité de couples qui conviennent : tous les couples où est un réel non nul.

*Remarque : on dit alors que est l’isobarycentre des points et .*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Comme est le milieu de , est barycentre de et . D’autre part, est le barycentre des points pondérés . L’associativité du barycentre permet d’écrire que est le barycentre des points pondérés et et donc appartient à la droite médiane issue de dans le triangle .   On démontrerait de même que est le barycentre des points pondérés et et que est le barycentre des points pondérés et . |  |

Le point est donc le point de concours des trois médianes du triangle .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Comme , le point est le barycentre de et . On peut aussi définir le point J comme barycentre de et et le point K comme barycentre de et ou de et .   L’associativité du barycentre permet d’écrire que est le barycentre des points pondérés , et .  L’associativité du barycentre permet alors aussi d’écrire que est le barycentre des points pondérés et .  En particulier le point est aligné avec les points et . |  |