**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2022-2023 Stage « filé »**

**Classe terminale Fiche numéro 2**

**Parution lundi 5 décembre Retour attendu pour le mardi 3 janvier**

**Exercice 1 – Recherche d’extremum**

Propriété : soit une fonction dérivable sur un intervalle et . La fonction admet un extremum en si et seulement si sa dérivée s’annule **en changeant de signe** en .

Soitun repère orthonormé du plan. On définit la fonction du plan dans l’ensemble des nombres réels, associant à tout point de coordonnées dans le repère, le nombre réel .

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On se propose de déterminer les valeurs extrémales de la fonctionsur le cercle (C) et dans le disque fermé D délimité par (C).

1. Montrer que pour tout point de coordonnées appartenant au cercle (C),.
2. En déduire les valeurs extrémales de sur le cercle (C) et les points en lesquels ces extremums sont atteints.
3. Déterminer les valeurs extrémales de *f* sur le disque fermé D.
4. Pour un point de coordonnées appartenant au cercle (C), on a la relation : .

Donc

1. Pour un point du cercle (C), l’abscisse est un nombre réel de l’intervalle .

On étudie les variations de la fonction dans l’intervalle .

Le calcul de la dérivée de la fonction *g* donne : , d’où

soit .

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 |
|  | * - 0 + + |
|  | + 0 - - 0 + |
|  | * 0 + 0 - 0 + |
|  | 1 1 1 |

Le maximum de la fonction *f* sur le cercle (C) est 1 et ce maximum est atteint aux points de coordonnées (

Le minimum de la fonction *f* sur le cercle (C) est et ce maximum est atteint aux points de coordonnées .

1. Pour tout point du disque D, et donc le minimum de *f* est 0 atteint en l’origine.

Pour tout point du disque D, donc . Et par croissance de la fonction « carré » sur , . D’où avec égalité pour les points du cercle (C).

Donc le maximum de *f* est 1.

**Exercice 2 – Suites croissantes majorées.**

Définition : On dit qu’une suite (*un*) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel tel que pour tout entier naturel .

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

Soit une suite dont les termes sont positifs ou nuls, majorée par un nombre réel positif .

Pour tout entier naturel , on définit .

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer par récurrence que .
3. Démontrer que la suite est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite .
5. On considère la suite définie par : pour tout entier naturel *n*, .
6. Vérifier que pour tout entier naturel *n*, .
7. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
8. ; est positif ou nul par hypothèse et , donc ce qui justifie la croissance de la suite .
9. Pour tout entier naturel *,* soit la proposition  : «  ».

Initialisation :

Par convention, et  ; par hypothèse , donc est vérifiée.

Hérédité : Si pour un entier naturel , est vérifiée alors montrons que est encore vérifiée.

 ; par hypothèse de récurrence   et de plus .

Par addition des termes des inégalités de même sens, on obtient : ,c’est-à-dire ce qui est la proposition .

Conclusion : pour tout entier naturel , la proposition est vraie.

1. On utilise la propriété de somme des termes consécutifs d’une suite géométrique de raison :  ; donc **,**   d’où **,**  .

Le nombre réel est un majorant de la suite .

1. La suiteest croissante et majorée, donc converge vers un réel tel que *.*
2. **a.** Si est un entier naturel pair, alors  ; si est un entier naturel impair, alors .

Donc la suite vérifie : pour tout entier naturel , .

**b.** La suite vérifie les hypothèses requises pour conclure d’après la question 4. que la suite est convergente.

 .

donc  ; on en déduit

**Exercice 3 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien**

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.

On sait que pour tous nombres strictement positifs et , et .

On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions dérivables sur et telles que pour tous nombres réels et :

1. .
2. Calculer
3. Pour tout nombre réel , on considère la fonction définie sur par où est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction  ?
4. Montrer que g est dérivable sur et exprimer .
5. Si on pose montrer que pour tout nombre réel , .
6. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.
7. Si on écrit l’égalité (1) pour , on obtient d’où .
8. D’après l’égalité (1), pour tout réel , donc est une fonction constante.
9. Comme somme et composition de fonctions dérivables sur , la fonction est dérivable sur et pour tout , on a .
10. Comme est une fonction constante, on en déduit que pour tout réel ,

En particulier, pour tout nombre réel soit, si on pose .

La fonction a donc même dérivée que la fonction . Or , on en déduit que

1. Si on a de plus alors soit et est la fonction logarithme népérien.

**Exercice 4 – Propriétés des combinaisons**

Propriétés :

(1) pour tous entiers et tels que ,  ;

(2) pour tous entiers et tels que , .

(3) pour tout entier , pour tous réels et ,

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d’autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier ,

(ii) (iii)

***a.*** Démontrer par récurrence la relation (i) en s‘appuyant sur les propriétés (1) et (2).

***b.*** Démontrer la relation (ii) en s’appuyant sur la propriété (3).

***c.*** Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.

***d.*** En considérant la dérivée de la fonction , démontrer que pour tout entier ,

.

***a.*** Pour , l’égalité est vraie puisqu’elle s’écrit .

Si l’égalité est vraie au rang , alors

Soit, en s’appuyant sur la propriété (2) :

Or et

D’où

D’après l’hypothèse de récurrence, on a donc

Et l’égalité est encore vraie au rang donc pour tout entier .

***b.*** En s’appuyant sur la propriété (3), .

*Remarque : cette méthode est aussi valable pour démontrer l’égalité (i).*

correspond au nombre de tirages de boules dans une urne contenant boules noires et boules blanches.

Chacun de ces tirages peut être constitué de boules noires et boules blanches, variant de 0 à .

Pour fixé, il y a façons de tirer les k boules noires et façons de tirer les boules blanches donc il y a tirages de ce type. D’après la propriété (1), ce nombre d’écrit aussi .

D’où.

***d.*** Soit la fonction définie sur **R** par . Cette fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel , on a et on a alors .

D’autre part, d’après la propriété (3),

d’où et, en particulier, .

On a donc bien .

**Exercice 5 – Suite de Fibonacci et « nombre d’or »**

Dans l’étude des suites, on se ramène souvent à des suites connues comme les suites arithmétiques ou les suites géométriques. C’est le cas pour les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d’ordre 2, c’est-à-dire une relation du type .

**Partie A**

On considère la suite définie sur **N** par et, pour tout entier naturel , (1).

Cette suite est appelée suite de Fibonacci (mathématicien Léonard de Pise dit Fibonacci du 12e siècle).

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite.
2. On cherche les suites géométriques vérifiant la relation (1). Si on note la raison d’une telle suite, déterminer les valeurs possibles de On note et les deux valeurs possibles.

On admet que toute pour toute suite vérifiant la relation (1), il existe deux réels ettels que pour tout entier ,

1. Déterminer les réels et pour que la suite soit la suite de Fibonacci. Donner l’expression de en fonction de .

**Partie B**

On considère la suite définie sur **N** par, pour tout entier naturel , .

1. Montrer que pour tout entier naturel , et en déduire que la suite converge vers un nombre qu’on déterminera.

Ce nombre est appelé « nombre d’or »

1. Montrer que le nombre vérifie les relations suivantes :

(i) (ii) pour tout entier naturel ,

1. Expliquer les relations :

et

**Partie A**

1. , d’où on tire successivement en s’appuyant sur la relation de récurrence (1) :

, , , , , , .

1. Soit une suite géométrique de raison . Il existe donc un réel tel que pour tout entier , .

La suite vérifie la relation (1) si et seulement pour tout entier , .

Si on exclut la suite nulle (qui ne peut être la suite de Fibonacci puisque ), on se ramène à l’équation du second degré dont le discriminant est et les solutions sont et .

Les suites géométriques vérifiant la relation (1) sont donc les suites et .

On admet donc que les suites vérifiant la relation (1) sont telles qu’il existe deux réels ettels que pour tout entier , .

1. se traduit par le système soit

Soit soit soit .

La suite de Fibonacci est donc la suite définie par .

On peut aussi écrire .

**Partie B**

1. Pour tout entier , .

Or donc et donc .

On met donc en facteur au numérateur et en facteur au dénominateur. On obtient alors :

. Comme et , et on en déduit que

. Le nombre d’or est donc .

1. est solution de l’équation donc soit .

et sont les solutions de l’équation donc leur produit vaut soit .

Or, pour tout entier , on a

Soit .

Et avec

donc .

**Exercice 6 – Le cercle des neuf points (ou « cercle d’Euler », mais Euler en a tant fait…)**

En géométrie vectorielle, on rappelle que :

- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;

- la nullité d’un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité ;

- le centre de gravité d’un triangle ABC (point de concours des médianes) est le point G tel que

.

Soit ABC un triangle. On appelle :

- A’, B’, C’ les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] ;

- D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;

- G le centre de gravité du triangle ABC.

1. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et H le point défini par .

Montrer que H est l’orthocentre du triangle ABC et que . Qu’en déduit-on pour les points O, G et H ?

1. On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments [OH], [HA], [HB] et [HC]. On appelle le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle .

Démontrer que . En déduire que le segment [MA’] est un diamètre du cercle .

1. Montrer que le point D appartient au cercle .
2. Donner neuf points situés sur le cercle  (il s’agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle…)
3. Montrons que H appartient à la hauteur issue de A en calculant

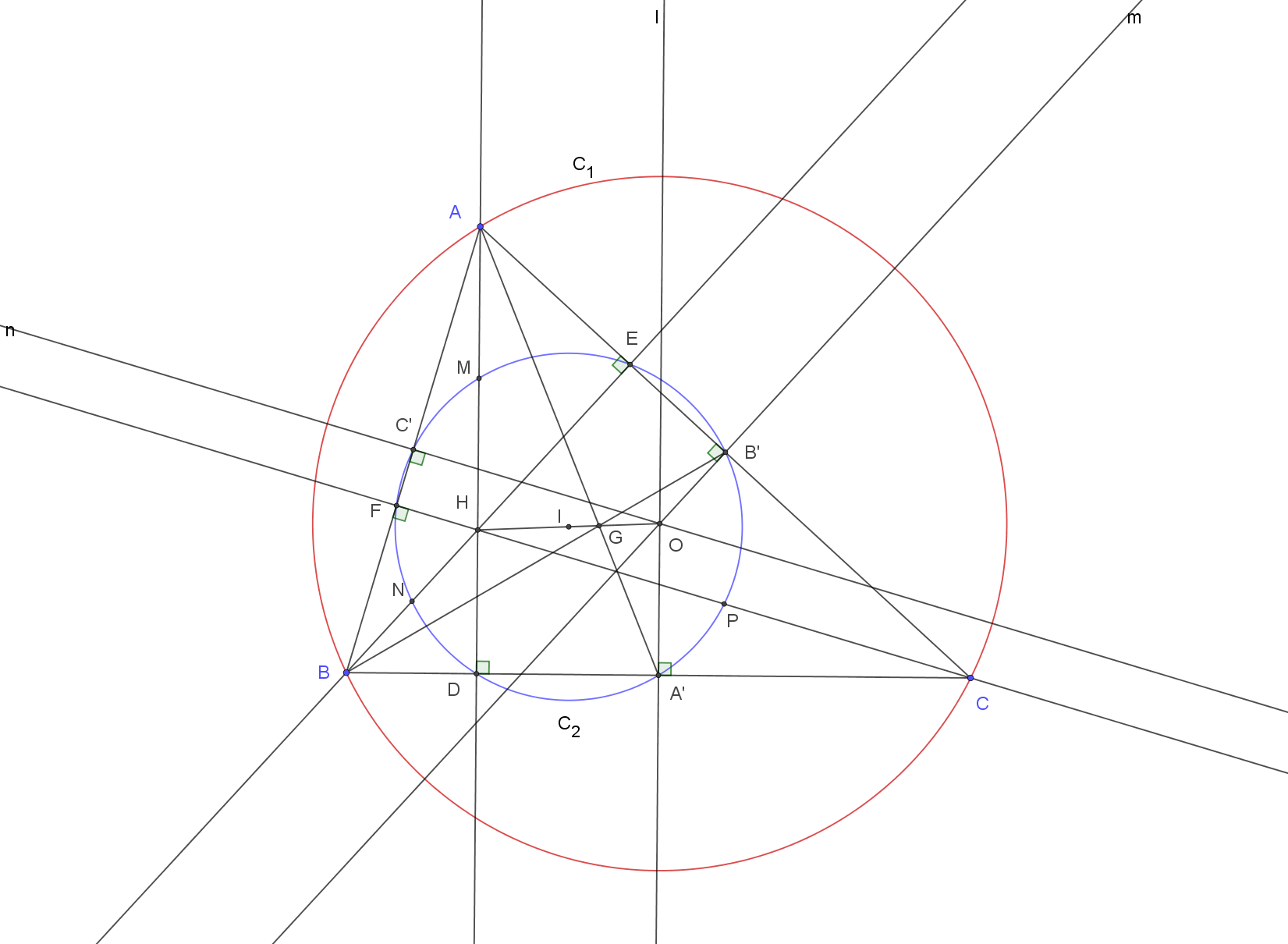
donc .

On en déduit que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires et que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On démontrerait de même que H appartient aux deux autres hauteurs.

H est donc bien l’orthocentre du triangle ABC.

De plus G étant le centre de gravité du triangle ABC,

soit c’est-à-dire . On en déduit que et donc les points O, H et G sont alignés.



1. I et M sont les milieux respectifs de [OH] et [HA] donc

Comme A’ est le milieu de [BC], .

Or I est le milieu de [OH] donc

et donc .

On en déduit que I est le milieu du segment [A’M].

De plus donc . Comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, OA en est le rayon et est le rayon du cercle . Les points M et A’ sont donc des points de ce cercle et, comme I est le milieu du segment [A’M], le segment [A’M] est un diamètre du cercle .

1. [A’M] est un diamètre du cercle et le triangle MDA’ est rectangle en D par définition de D donc le cercle passe par le point D.
2. On démontrerait de même qu’au 2. que les points N, P, B’ et C’sont des points du cercle et on démontrerait comme au c. que les points E et F sont des points du cercle .

Sur le cercle , on a donc les neuf points D, E, F, M, N, P, A’, B’ et C’.

*N.B. Michel Collet et Georges Griso, dans leur ouvrage consacré au cercle d’Euler, dénombrent jusqu’à 42 points liés à la figure et appartenant au cercle d’Euler. 42 définitions, 42 noms de points, mais combien de points ?*

**Exercice 7 – Fonction vectorielle de Leibniz**

L’objectif de cet exercice est d’étudier une fonction vectorielle, dite de Leibniz, et la notion de barycentre ainsi que ses applications à la géométrie (points alignés, droites concourantes,).

Définition : Soit points du plan notés et réels notés . On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* la fonction qui à tout point M du plan associe le vecteur :

**Partie A – Cas général**

1. **a**. On pose . Montrer que si est un point fixé du plan alors, pour tout point du plan,

.

* 1. Démontrer que si , alors il existe un unique point du plan tel que .

Ce point est alors appelé le barycentre des points pondérés et on appelle masse du système de ces points pondérés la somme de leurs coefficients.

1. **a**. Exprimer le vecteur en fonction des vecteurs pour .
   1. Soit un triangle, construire, s’ils existent, le barycentre des points pondérés et le barycentre des points pondérés .

.

1. Montrer que si est un réel non nul et si est le barycentre des points pondérés

alors est aussi le barycentre des points pondérés .

On admet la propriété dite *d’associativité du barycentre* : le barycentre de points pondérés ne change pas lorsqu’on remplace d’entre eux, dont la somme de leurs coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté du coefficient .

Grâce à des regroupements judicieux de points pondérés, cette propriété permet de démontrer que des droites sont concourantes ou que des points sont alignés.

**Partie B – Cas particuliers**

1. Soit et deux réels tels . Montrer que si est barycentre des points pondérés et , alors est aligné avec et .
2. Trouver deux réels et tels que le milieu d’un segment [AB] soit le barycentre des points pondérés et . Les réels et sont-ils uniques ?
3. Soit un triangle. Soit , et les milieux respectifs des segments et et soit le barycentre des points pondérés . En utilisant la propriété d’associativité du barycentre, retrouver le fait que les médianes du triangle sont concourantes.
4. Soit un quadrilatère. On considère les points et définis par et et les points et, milieux respectifs de et . Montrer que le milieu de est aligné avec les points et.

**Partie A**

1. **a.** Soit un point du plan. D’après la relation de Chasles,

* 1. équivaut, d’après la question précédente, à soit .

Comme , cela s’écrit . et sont fixés donc il existe bien un unique point du plan tel que .

1. **a.**  s’écrit

soit

soit

soit, puisque , .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. et donc le barycentre existe et, d’après la question précédente, , ce qui permet de construire le point .   et donc le barycentre existe et, d’après la question précédente,  , ce qui permet de construire le point . |  |

1. Si est un réel non nul et si est le barycentre des points pondérés alors

. Or, donc le point est aussi le barycentre des points pondérés .

**Partie B**

1. Si est barycentre des points pondérés et , alors, d’après la question A.2.a., . On en déduit que les vecteurs et sont colinéaires et donc est bien aligné avec et .
2. Le point est le milieu de lorsque . On cherche donc et tels que soit soit . On peut prendre mais il y a une infinité de couples qui conviennent : tous les couples où est un réel non nul.

*Remarque : on dit alors que est l’isobarycentre des points et .*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Comme est le milieu de , est barycentre de et . D’autre part, est le barycentre des points pondérés . L’associativité du barycentre permet d’écrire que est le barycentre des points pondérés et et donc appartient à la droite médiane issue de dans le triangle .   On démontrerait de même que est le barycentre des points pondérés et et que est le barycentre des points pondérés et . |  |

Le point est donc le point de concours des trois médianes du triangle .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. s’écrit soit , ce qui signifie que le point est barycentre de et .   De même s’écrit  Soit , ce qui signifie que le point est barycentre de et .  D’autre part, le milieu de est aussi le barycentre de et et le milieu de est aussi le barycentre de et .  Soit le milieu de est aussi le barycentre de et . Par |  |

associativité du barycentre, est aussi le barycentre de et . Toujours par associativité du barycentre, mais en regroupant différemment les points, est le barycentre de et . En particulier, le point est aligné avec les points et .