**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2021-2022 Stage « filé »**

**Classe terminale Fiche numéro 1**

**Parution lundi 18 octobre Retour attendu pour le vendredi 12 novembre**

**Exercice 1 Suites adjacentes**

**Définition :** deux suites et sont dites adjacentes lorsque l’une est croissante, l’autre décroissante et .

**Théorème :** deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

**1.** Démonstration : on considère deux suites adjacentes et telles que est croissante, est décroissante.

***a.*** Montrer que la suite est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

***b.*** En déduire que les deux suites et sont convergentes, qu’elles ont même limite , et que pour tout entier ,

**2.** Application : on considère les deux suites et définies sur **N\*** par :

et .

***a.*** Montrer que les suites et sont adjacentes.

***b.*** Soit leur limite commune. Déterminer un encadrement de d’amplitude

***c.*** Montrer que le nombre est un irrationnel. (On pourra raisonner par l’absurde en supposant qu’il existe deux entiers et **N\*** tels que et partir de l’encadrement ).

**1.** On considère deux suites et telles que est croissante, est décroissante.

***a.*** Pour tout entier , on a donc soit et d’où en ajoutant membre à membre les inégalités, , ce qui signifie que la suite est décroissante.

Comme de plus converge vers 0, cette suite est à termes positifs.

***b.*** On a alors pour tout entier ,

La suite est donc croissante et majorée par et la suite est décroissante minorée par .

Elles convergent donc toutes les deux.

Si on appelle et leurs limites respectives, alors d’où .

De plus, comme est croissante et de limite , et, de façon analogue, .

**2. *a.*** On va déjà démontrer que la suite est croissante et que la suite est décroissante. Pour tout entier ,

, nombre positif. Donc est croissante.

Soit , nombre négatif. Donc est décroissante.

De plus, donc .

On peut donc affirmer que les suites et sont adjacentes.

***b.*** Comme est la limite communes suites adjacentes, pour tout entier , et, pour avoir un encadrement de d’amplitude , il suffit d’avoir , ce qui est vérifié pour

Une programmation permet d’obtenir .

En python :

from math import factorial

# initialisations

u = 2

v = 3

n = 1

# calculs des termes successifs

while v - u > 10\*\*(-9) :

n = n + 1

u = u + 1/factorial(n)

v = u + 1/(n\*factorial(n))

# affichage des termes de rang n de la suite u et de la suite v tels que v\_n – u\_n <10^-9

print((u, v, n))

***c.*** Si le nombre e est rationnel alors il existe deux entiers et **N\*** tels que  . Comme pour tout entier soit

D’où . Ceci est impossible car l’entier ne peut être compris strictement entre les deux entiers consécutifs et .

**Exercice 2 Théorème des valeurs intermédiaires**

**Théorème :** soit une fonction définie et continue sur un intervalle et telle que et sont non nuls et de signes contraires alors il existe un réel tel que .

L’objectif de l’exercice est de démontrer ce théorème.

On considère une fonction définie et continue sur un intervalle et telle que et sont non nuls et de signes contraires et on construit les suites et telles que :

, et, pour tout entier ,

si alors et

si alors et .

Démontrer que les suites et sont adjacentes et que leur limite commune vérifie .

On va démontrer que :

**1.** La suite converge vers 0.

**2.** La suite est croissante ;

**3.** La suite est décroissante ;

**1.** Etudions déjà la suite .

qui est un nombre positif.

De plus, pour tout entier , vaut soit soit .

Dans les deux cas, . La suite est donc une suite géométrique de raison

On en déduit qu’elle converge vers 0. De plus comme son premier terme est positif, tous ses termes sont positifs.

**2.** Pour tout entier , vaut soit soit 0. Dans les deux cas, .

La suite est donc croissante.

**3.** Pour tout entier ,   vaut soit 0 soit .

Dans les deux cas, .

La suite est donc décroissante.

Les suites   et sont bien adjacentes.

Elles convergent donc toutes les deux et ont même limite .

Montrons par récurrence que pour tout entier , et .

Pour , qui est positif et qui est négatif.

Si pour un certain entier , et

Alors :

si alors et donc et, comme .

si alors et donc , comme , alors et .

Dans les deux cas, et donc les inégalités sont vérifiées au rang

On peut en conclure que pour tout entier , et .

Comme la fonction est continue sur , d’où et

Soit .

**Exercice 3 Sommes de carrés**

Théorème :

pour tout entier naturel non nul , .

**1.** Démontrer ce résultat par récurrence.

**2.** Déterminer, pour tout entier , les sommes :

, somme des premiers entiers pairs ;

, somme des premiers entiers impairs.

**1.** Pour , le terme de gauche dans l’égalité vaut 1 et celui de droite vaut donc l’égalité est bien vérifiée.

Si pour un entier , on a , alors

On a donc bien

Ce qui signifie que l’égalité est encore vraie au rang .

Remarque : on peut obtenir la dernière égalité de deux façons, soit en cherchant les racines du polynôme pour le factoriser soit en partant de l’égalité qu’on cherche à obtenir puisque si et alors .

Conclusion : pour tout entier , .

**2.** Il s’agit, dans un premier temps, de se ramener à la somme vue dans la question 1. en remarquant que pour tout entier , et donc que

Soit .

On remarque ensuite qu’en additionnant et on obtient une somme du type de la question 1. Plus précisément :

Soit

Soit

Soit

**Exercice 4 Équations fonctionnelles**

**Équation fonctionnelle de Cauchy**

On veut montrer que toutes les fonctions définies et continues sur **R** telle que pour tous réels et , sont linéaires.

***a.*** Soit une telle fonction, montrer que et que pour tout entier naturel non nul ,

. (1)

***b.*** Montrer que cette égalité est aussi vraie pour tout entier négatif.

***c.*** En remarquant que si et sont deux entiers tels que , , en déduire que l’égalité (1) est vérifiée pour tout réel et tout rationnel . En déduire qu’il existe un réel tel que pour tout rationnel , .

***d.*** On admet que tout nombre réel peut être obtenu comme limite d’une suite de nombres rationnels. En déduire que, pour tout réel , .

***e.*** Conclure

***a.*** Si on prend , on obtient dont la seule solution est .

Pour , l’égalité (1) est vérifiée.

Si cette égalité est vérifiée pour un entier , alors pour tout réel ,

et l’égalité (1) est vérifiée au rang .

Conclusion : pour tout réel et pour tout entier naturel non nul , .

***b.*** Si est un entier négatif alors et pour tout réel ,

. Or, comme , ,

d’où .

***c.*** Pour tout rationnel, il existe deux entiers et tels que et . D’après les questions ***a.*** et ***b.*** pour tout réel , d’où l’égalité (1) est bien vérifiée pour tout rationnel et tout réel x. En particulier, pour , . Il suffit de poser .

***d.*** Soit un réel quelconque. Il existe une suite de nombres rationnels telle que alors, comme est continue sur **R**,

Soit .

***e.*** On en déduit que les solutions de l’équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires.

**Exercice 5 Fonction exponentielle**

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur **R** et telle que :

1) pour tous réels et,

.

Théorème : Si une fonction définie sur **R** et telle que :

  et pour tous réels et , , alors est la fonction exponentielle.

Soit une fonction définie et dérivable sur **R** et telle que

  et pour tous réels et , .

Démonstration 1 :

***a.*** Déterminer les valeurs possibles pour . Montrer que

***b.*** Si est fixé, on note la fonction définie sur **R** par . Exprimer de deux manières différentes . En déduire que la fonction vérifie une équation du type .

***c.*** Conclure.

Démonstration 2 (si on connait la fonction ln) :

***a.*** Montrer que pour tout réel , . En déduire le signe de la fonction .

***b.*** Montrer que s’il existe un réel tel que alorsest la fonction nulle.

***c.*** On suppose maintenant que pour tout réel , et on pose, pour tout réel , .

Montrer que vérifie l’équation fonctionnelle de Cauchy.

***d.*** Conclure.

Démonstration 1 :

***a.*** Si , alors soit soit ou .

On remarque que si , alors pour tout réel , , ce qui est contredit par l’égalité .

***b.*** Si est fixé, la dérivée de la fonction est la fonction donc .

Comme on a aussi alors puisque est une constante.

En particulier, si , et ceci pour tout réel . Il suffit alors de poser

***c.*** La fonction vérifie l’équation fonctionnelle et .

On en déduit que pour tout réel , . Comme de plus, , soit et la fonction exponentielle est bien l’unique solution du problème.

Démonstration 2 :

***a.*** Pour tout réel , . On en déduit que la fonction est positive ou nulle.

***b.*** S’il existe un réel tel que alors pour tout réel ,

et la fonction est la fonction nulle, ce qui est contredit par  .

***c.*** Comme la fonction ne s’annule pas (d’après le b.) et comme elle est positive ou nulle (d’après le a .), la fonction est bien définie sur **R** et pour tous réels et ,

.

***d.*** Les fonctions vérifiant l’équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires donc il existe un réel tel que pour tout réel , soit

Comme de plus, on a et la fonction exponentielle est bien l’unique solution du problème.

**Exercice 6 Sens de variation et comparaison de fonctions**

Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d’une fonction pour en déduire son signe.

En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel , et

**1.** Montrer que pour tout réel positif ou nul , on a .

On pourra étudier sur les variations de la fonction définie par .

**2.** Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul , on a :

.

**3.** En déduire un encadrement de et de .

**1.** Soit la fonction définie sur par . Par somme, est dérivable sur et pour tout réel positif ou nul , on a  et donc est croissante sur .

Comme , on en déduit que pour tout réel positif ou nul , soit .

*Attention : il ne faut pas confondre fonction croissante et fonction positive mais l’un permet parfois de déduire l’autre.*

**2.** On considère de même les fonctions et définies sur par :

et .

Les trois fonctions sont dérivables sur et :

* pour tout réel positif ou nul , donc donc est croissante sur .

Or donc pour tout réel positif ou nul , soit .

* pour tout réel positif ou nul , donc donc est croissante sur .

Or donc pour tout réel positif ou nul , soit .

* pour tout réel positif ou nul , donc donc est croissante sur .

Or donc pour tout réel positif ou nul , soit .

**3.** Des inégalités obtenues dans la question 2 ., on tire les encadrements, pour tout réel positif ou nul  :

et .

Ces inégalités se généralisent et on peut démontrer que les fonctions cosinus et sinus peuvent être approchées au voisinage de toute valeur, en particulier 0, par des fonctions polynômes. On parle de *développement limité*.

**Exercice 7 Tangentes à une parabole**

Les fonctions polynômes du second degré sont représentées par des paraboles. Ces courbes et leurs tangentes ont de nombreuses propriétés qui peuvent se démontrer en s’appuyant sur le fait qu’un point appartient à un ensemble si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de l’ensemble dans un repère.

Petit rappel : deux droites du plan sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur dans un repère orthonormal est égal à .

On considère la fonction définie sur **R** par où est un réel donné et un point du plan de coordonnées dans un repère orthonormal.

**1.** Soit un point de la courbe représentative de la fonction dans un repère. Déterminer une équation de la tangente à en .

**2.** Montrer que la droite coupe l’axe des ordonnées en un point qui est le symétrique par rapport à l’origine du projeté orthogonal de sur l’axe des ordonnées.

**3.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu’il existe au moins une tangente à passant par le point . Etudier plus précisément le nombre de tangentes à passant par le point .

**4.** Dans le cas, où il existe exactement deux tangentes à passant par le point , montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si

**5.** Toujours dans le cas où il existe exactement deux tangentes à passant par le point , montrer que si et sont les deux points de contact de ces tangentes avec la parabole et si est le milieu de alors la droite est parallèle à l’axe des ordonnées.

**1.** Une équation de la tangente à en s’écrit soit, après simplification, .

**2.** Les coordonnées du point d’intersection de cette tangente avec la courbe vérifient les deux équations de droite. Son abscisse est donc nulle et son ordonnée vaut Or le projeté orthogonal de sur l’axe des ordonnées a pour abscisse 0 et même ordonnée que . On vérifie aisément sur les coordonnées que l’origine du repère est bien le milieu de .

*De cette propriété Evangelista Toricelli (physicien et géomètre du 17e siècle) a tiré une méthode de construction de tangente à la parabole en  : construire et T puis la droite .*

**3.**  appartient à si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de soit

, équation du second degré en qui s’écrit .

Le discriminant de cette équation est .

Il existe au moins une tangente à passant par le point si et seulement si

**4.** Si les deux solutions de l’équations sont  et

et les coefficients directeurs des deux tangentes sont et .

Leur produit est . Les deux tangentes sont donc perpendiculaires si et seulement si

*La droite d’équation est en fait la « directrice » de la parabole.*

**5.** Dire que est parallèle à l’axe des ordonnées revient à dire que les points et ont même abscisse.

Or a pour abscisse . Comme et sont les solutions de l’équation , on sait que et . Les points et ont donc bien même abscisse.