**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2021-2022 Stage « filé »**

**Classe terminale Fiche numéro 3**

**Parution lundi 17 janvier Retour attendu pour le mercredi 2 février**

**Exercice 1 Sommes d’inverses et constante d’Euler-Mascheroni**

Rappels :

* pour comparer deux nombres, on étudie le signe de la différence ;
* pour déterminer le signe d’une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s’annule ;
* on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens.

En algèbre, on étudie des suites définies par , où est une suite de réels. Ces suites sont appelées *séries* et certaines sont très connues. La fiche 1 faisait étudier une série convergeant vers le nombre *e*.

Cet exercice fait étudier deux autres séries très classiques.

On considère les deux suites et définies par :

Pour tout entier , et .

1. a. Étudier le sens de variation de la suite .

b. Comparer, pour tout entier , les nombres et . En déduire une majoration du nombre .

c. Montrer que la suite converge.

*On démontre en fait que la limite de la suite est .*

1. a. Montrer que pour tout réel ,

b. En déduire que, pour tout entier , un encadrement de

c. Montrer que, pour tout entier , . En déduire la limite de la suite .

1. Soit la suite définie par, pour tout entier , .
   1. Déterminer le sens de variation de la suite .
   2. Montrer que la suite converge.

*On appelle constante d’Euler-Mascheroni la limite de la suite* .

1. a. Pour tout entier , qui est un nombre strictement positif. On en déduit que **la suite est strictement croissante.**
2. Pour tout entier , d’où, en multipliant par ,.

On en déduit que (i)

On peut remarquer que, pour tout entier , . On peut alors écrire, en additionnant membre à membre les inégalités (i) en faisant varier de 1 à  et : .

Or

Soit .

Cela implique que **pour tout entier ,** .

1. La suite est donc croissante et majorée par 2. On en déduit qu’elle **converge vers une limite** .
2. a. Pour tout réel , on pose . Ces deux fonctions sont dérivables sur et :

pour tout réel , .

On a donc , pour tout .

La fonction est donc croissante sur . Or donc **pour tout** ,

Soit

De même, pour tout réel , , quantité positive sur . La fonction est donc croissante sur et comme , on en déduit que **pour tout ,** .

1. Pour tout entier ,

D’après la question précédente, on a donc soit  (ii).

Ces inégalités s’écrivent successivement :

….

1. En faisant varier de 1 à et en additionnant membre à membre les inégalités (ii), on obtient, pour tout entier  :

. La première inégalité de cet encadrement s’écrit aussi et comme elle est valable pour tout entier , on a aussi .

On a donc bien **pour tout entier ,**  **.**

La première inégalité suffit pour affirmer que **.**

1. a. Pour tout entier ,

D’après la question 2a., on en déduit que et que **la suite est croissante.**

1. Pour tout entier , et donc

d’où soit car donc .

La suite est donc croissante et majorée. On en déduit que **cette suite est convergente.**

*La limite de cette suite, appelée constante d’Euler-Mascheroni, est approchée très lentement avec la suite .*

*Euler en calcula pourtant 16 décimales en 1734. Ce nombre est encore mal connu (on ne soit toujours pas si c’est un rationnel ou non) mais il intervient dans d’autres domaines des mathématiques, notamment en arithmétique.*

**Exercice 2 Comparaison de moyennes**

On montre que pour tout entier tel que , la fonction définie sur **R+** par est dérivable (donc continue) sur **R+** et strictement croissante sur **R+.** Comme de plus et , le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que est une bijection de **R+** sur **R+** et admet donc une bijection réciproque g définie sur **R+**. On dit que est la fonction racine ième et on note pour tout de l’intervalle **R+**, .

La fonction racine ième est strictement croissante et vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous réels et positifs , si de plus , .

Rappel : pour tous réels strictement positifs et , , et pour tout entier , et .

Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d’un produit.

Soit un entier tel que et , réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique , la moyenne géométrique et la moyenne harmonique de ces réels par :

1. Montrer que pour tout réel , .
2. Appliquer l’inégalité précédente successivement aux nombres pour comparer les nombres et .
3. Appliquer aux nombres l’inégalité trouvée précédemment pour les nombres et en déduire une inégalité entre et .
4. On considère la fonction définie sur par . Cette fonction est dérivable sur et pour tout réel , . Sur , a le signe de . La fonction est donc décroissante sur et croissante sur . Son minimum est donc . La fonction est donc positive et **pour tout réel ,** .
5. Pour tout entier compris entre 1 et , , on peut donc écrire . En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient : .

Or , ce qui s’écrit aussi . L’inégalité précédente s’écrit donc .

D’autre part,

Ce logarithme népérien est négatif ou nul si et seulement si soit

Soit . On a donc bien .

1. En appliquant l’inégalité précédente aux nombres ,

on obtient c’est-à-dire soit . Comme les nombres et sont strictement positifs, cela équivaut à .

**Exercice 3 Fonctions puissances**

Dans le prolongement de la fonction racine ième, si est un réel non nul, on définit sur la fonction puissance notée par .

On rappelle que pour tout réel , .

1. Etudier, suivant les valeurs de les variations sur de la fonction .
2. Etudier, suivant les valeurs de les limites en 0 et en de la fonction .
3. Dans le cas où , on prolonge la fonction en 0 en posant . Montrer que la nouvelle fonction est alors continue en 0 et étudier, suivant les valeurs de sa dérivabilité en 0.
4. Choisir plusieurs valeurs particulières de représentatives des différents cas étudiés et tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives des fonctions correspondantes.
5. Par composition la fonction est dérivable sur et pour tout ,

. Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que le signe de est celui de . On peut remarquer que .

Donc si alors la fonction est strictement décroissante sur , si alors la fonction est constante et si alors la fonction est strictement croissante sur .

1. Si , donc et donc et les axes du repère sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction .

Si , donc et donc .

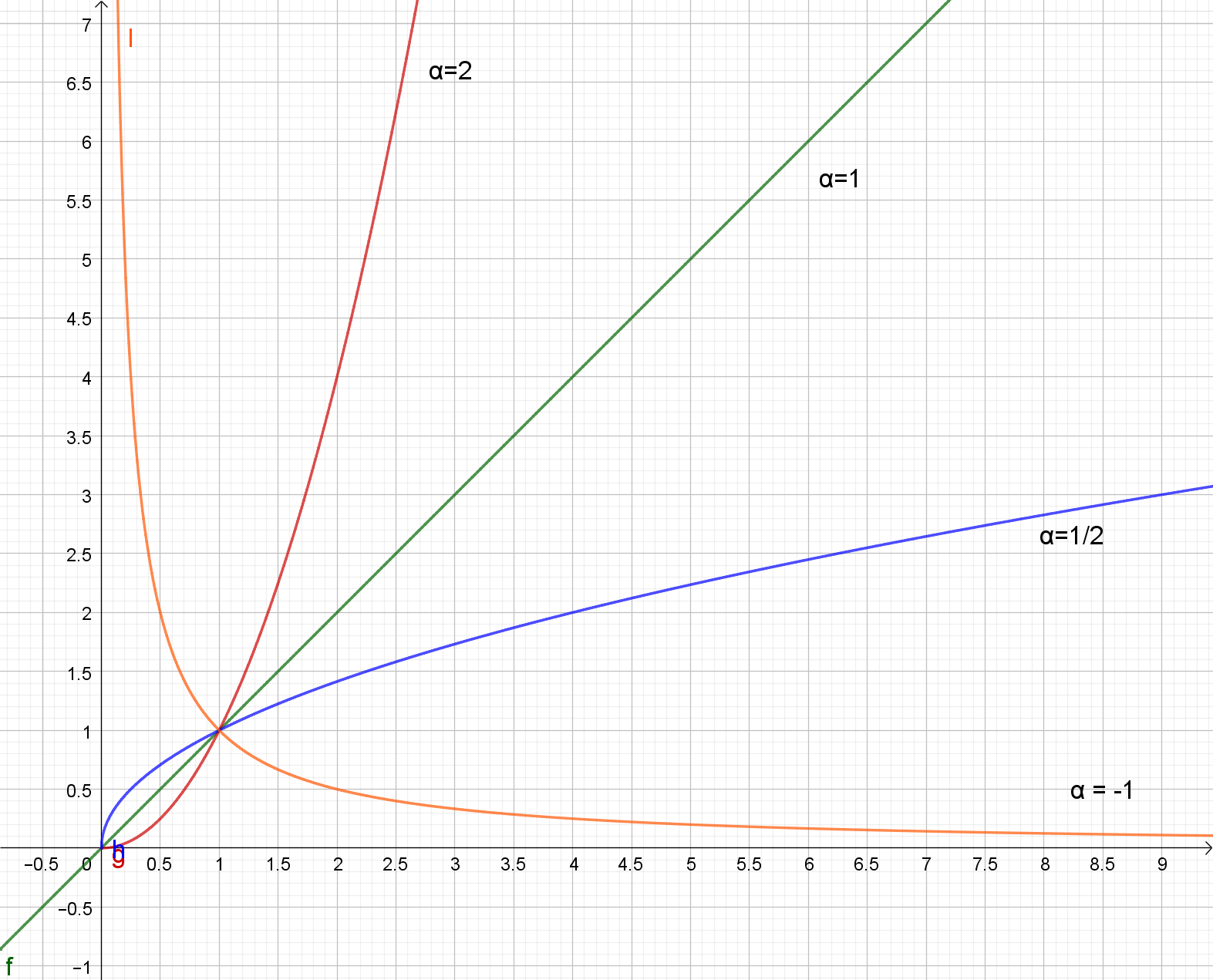
1. On suppose dans cette question que . Alors comme et qu’on pose , la fonction prolongée est bien continue en 0.

Pour étudier la dérivabilité en 0 de la fonction, on étudie le quotient d’après le calcul déjà fait à la question 1.

Si alors donc

Si alors et la fonction est dérivable en 0 et

Si alors donc donc la fonction est dérivable en 0 et .



**Exercice 4 Aires, intégrales et inégalités**

Le plan étant muni d’un repère orthonormal, on définit l’intégrale d’une fonction continue et positive sur un intervalle comme l’aire du domaine délimité par l’axe des abscisses, la courbe représentant la fonction et les droites d’équation et.

Cette aire peut être majorée, minorée, encadrée par des sommes d’aires de rectangles ou de trapèzes lorsque la fonction est monotone et convexe ou concave, ce qui permet soit de déterminer une valeur approchée de l’aire soit d’obtenir des inégalités.

Définition : une fonction est dite convexe lorsque pour tous points A et B de sa courbe représentative, le segment [AB] est situé au-dessus de la courbe.

Propriété 1 : si une fonction est deux fois dérivable sur un intervalle , alors est convexe sur si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur .

Propriété 2 : si une fonction est convexe sur un intervalle alors, sur l’intervalle , la courbe représentative de est située au-dessus de ses tangentes.

On sait que si et sont deux réels strictement positifs alors . L’objectif de cet exercice est de démontrer que si alors .

Dans le plan muni d’un repère orthonormal, on considère la courbe représentative sur de la fonction

.

1. Montrer que et que .
2. En partageant l’intervalle en deux intervalles comme sur la figure 1 ci-dessous, et en considérant la tangente à la courbe au point d’abscisse montrer que si alors .
3. En effectuant un autre partage de l’intervalle en deux intervalles, comme sur la figure 2 ci-dessous, montrer que si alors .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Figure 1 | Figure 2 |

1. Si alors . Or donc et

donc .

D’autre part, comme et sont positifs, les comparer revient à comparer et . Or

qui est un nombre positif donc et de même qui est positif donc .

1. La fonction est décroissante sur . De plus, est deux fois dérivable sur et, pour tout ,

et donc . La fonction est donc convexe sur .

On en déduit que, si et sont deux réels tels que , la courbe est située au-dessus de sa tangente au point d’abscisse . Une équation de est .

Soit et donc une équation de est

Comme , l’aire du domaine compris entre la courbe représentant , l’axe des abscisses et les droites d’équation et est supérieure à l’aire du trapèze de bases [AD] et [BE].

Pour calculer cette aire calculons les ordonnées des points D et E.

D est le point de d’abscisse . Son ordonnée vaut donc :

.

De même, .

On en déduit que .

Or

D’où , ce qui équivaut puisque et (car ) à

1. La fonction est convexe sur et , donc l’aire est inférieure à la somme des aires des trapèzes ACC’A’ et CBB’C’.

L’aire du trapèze ACC’A’ est égale à

On calcule de la même façon l’aire du trapèze CBB’C’ :

D’où .

Comme et , on obtient ce qui équivaut, puisque et (car ), à

**Exercice 5 Espérance et variance en indépendance**

On rappelle que :

Définition : soit est une variable aléatoire prenant les valeurs alors l’espérance mathématique de et la variance de sont définies par :

et .

Propriété 1 : soit et deux variables aléatoires et un réel, alors et

Propriété 2 : soit une variable aléatoire, alors .

Définition : soit et deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs et les valeurs . On dit que et sont indépendantes lorsque pour tout entier tel que et pour tout entier j tel que, on a .

1. Démontrer la propriété 2.
2. Montrer que si et sont deux variables aléatoires indépendantes alors et .
3. Soit la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres et . À l’aide des propriétés ci-dessus, retrouver l’expression de et de en fonction de et .
4. . Or est une constante dont l’espérance est elle-même et l’espérance est linéaire d’après la propriété 1.

Donc .

1. SI et deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs et les valeurs , alors si on considère la variable aléatoire . Les valeurs prises par sont les produits obtenus dans un tableau à double entrée des valeurs prises par et par . Certains de ces produits peuvent donner la même valeur .

Cela revient à dire que

Soit soit, puisque les variables X et Y sont indépendantes,

Soit

C’est-à-dire .

D’autre part, d’après la propriété 2,

Soit .

Comme les variables aléatoires et sont indépendantes, . On a donc :

Soit

1. Si est la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres et , on peut considérer comme la somme de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli et prenant la valeur 1 avec la probabilité en cas de succès et la valeur 0 sinon.

Alors, d’après la propriété 1 : car pour tout

Et d’après la question précédente :

**Exercice 6 Orthogonalité dans un cercle**

On peut démontrer une orthogonalité en prouvant qu’un produit scalaire est nul.

Les propriétés opératoires du produit scalaire alliées à la relation de Chasles sont souvent utiles pour calculer des produits scalaires.

On considère un cercle de centre O et de rayon et un point M intérieur au cercle. Par le point M, on mène deux droites perpendiculaires qui coupent le cercle en A et A’ pour une droite, en B et B’ pour l’autre droite. On note I le milieu de [AB].

1. Montrer que .

(On pourra introduire le point C diamétralement opposé à A sur le cercle ).

1. Montrer que la droite (IM) est la hauteur issue de M dans le triangle MA’B’.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Soit C le point diamétralement opposé à A sur le cercle .     Or le triangle AA’C a son côté [AC] diamètre du cercle . Il est donc rectangle en A’ et  Soit  Soit  Or O étant le centre du cercle donc le milieu de [AC],  Et  On a donc bien .  On a de même . |  |

1. On va montrer que le produit scalaire est nul.

I est le milieu de [AB] donc et

Soit .

Comme les droites (AA’) et (BB’) sont perpendiculaires en M,

D’autre part,

Au final et la médiane issue de dans le triangle est bien la hauteur issue de dans le triangle

**Exercice 7 Intersection sphère plan**

|  |  |
| --- | --- |
| L’intersection d’une sphère de centre et d’un plan peut être :   * l’ensemble vide ; * un point (le plan est alors tangent à la sphère ) ; * un cercle   suivant que la distance du centre de la sphère au plan est respectivement supérieure, égale ou inférieure au rayon de la sphère.  Dans le cas où l’intersection est un cercle, si on note I son centre et son rayon alors la droite ( est perpendiculaire au plan  donc orthogonale à toute droite de ce plan. |  |

La distance d’un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, c’est-à-dire le point d’intersection entre le plan et la perpendiculaire au plan passant par A.

Propriété : si est un plan passant par un point et si est un vecteur normal de , alors la distance d’un point au plan est .

1. Démonstration et application de la propriété

Dans l’espace muni d’un repère orthonormal, on considère le plan d’équation , où .

Soit un point de l’espace et un point du plan . On note le projeté orthogonal de sur .

1. Montrer que, si est un vecteur normal du plan , alors .
2. En déduire l’expression de la distance du point au plan en fonction de .
3. On considère la sphère de centre , de rayon et le plan d’équation où k est un réel quelconque.
   1. Déterminer, suivant les valeurs de , l’intersection de la sphère avec le plan .
   2. Dans le cas où , déterminer les éléments caractéristiques de l’intersection de la sphère avec le plan .
4. a. .

Le point est l’intersection du plan avec la droite perpendiculaire à passant par et le vecteur est un vecteur normal du plan donc et .

Or les vecteurs et sont colinéaires et forment donc un angle de mesure 0 ou . Le cosinus de cet angle vaut donc d’où .

1. On a et comme a pour équation , on peut prendre .

Alors .

Or le point appartient à donc

d’où et

D’autre part,

Au final .

1. a. La distance du point au plan d’équation est égale à

et le rayon de la sphère est 4.

L’intersection de la sphère avec le plan est donc :

* l’ensemble vide si soit soit soit  ;
* réduit à un point si soit et le plan est alors tangent à la sphère ;
* un cercle si soit soit .

|  |  |
| --- | --- |
| * 1. Si , nous sommes dans le cas où donc l’intersection entre la sphère et le plan est un cercle .   Soit I le centre, le rayon et M un point du cercle . Comme la droite ( est perpendiculaire au plan , le triangle est rectangle en I d’où .  Or et d’où  Le cercle C a donc pour rayon et son centre I est un point du plan dont une équation est tel que le vecteur soit vecteur directeur de la droite (, ce qui signifie |  |

qu’il existe un réel tel que soit soit .

En reportant dans l’équation du plan ,

on obtient : soit 9 soit ce qui donne comme centre du cercle .