**Pépinière académique de mathématiques**

**Année 2022-2023 Stage « filé »**

**Classe terminale Fiche numéro 3**

**Parution lundi 30 janvier Retour attendu pour le jeudi 16 février**

**Exercice 1 – Suites et probabilités**

Propriété : si et sont deux événements incompatibles, alors .

Cette propriété s’étend à une union finie d’événements deux à deux incompatibles.

Propriété : Soient et des événements tels que  ; alors .

Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s’appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.

On extrait au hasard un jeton de l’urne et l’on note sa couleur.

Un jeu consiste à extraire un jeton de l’urne :

* Si le jeton est bleu, le jeu s’arrête et l’on a gagné.
* Si le jeton est noir, le jeu s’arrête et l’on a perdu.
* Si le jeton est vert, on le replace dans l’urne et l’on recommence l’épreuve.

Soit un entier naturel non nul. On fixe à le nombre d‘itérations de l’épreuve précédente (qui peut s’interrompre avant le rang si l’on a au préalable perdu ou gagné)

Pour tout entier inférieur ou égal à , on note :

* l’événement « le jeton extrait après itérations est bleu »
* l’événement « le jeton extrait après itérations est noir »
* l’événement « le jeton extrait après itérations est vert »
* l’événement « on a gagné à un rang inférieur ou égal à  »
* l’événement « on a perdu à un rang inférieur ou égal à  »

1. On se place dans cette question dans le cas où .
   1. Représenter l’épreuve à l’aide d’un arbre de probabilité.
   2. Calculer la probabilité de chacun des événements .
2. désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement la probabilité des événements .
   1. Montrer que la suite est une suite géométrique ; établir l’expression du terme général en fonction de *.*
   2. Soit un entier naturel *k* tel que . Justifier que et
   3. Montrer que pour tout entier naturel non nul, et .
   4. Exprimer et en fonction de l’entier .
   5. Etudier la convergence éventuelle des suites .
3. Déterminer le plus petit entier naturel *n* pour lequel
4. ***a.*** Le jeton est tiré au hasard, ce qui assure l’équiprobabilité, puis remis dans l’urne après chaque tirage. Les données du problème en pourcentages se traduisent donc par l’arbre de probabilité ci-dessous.

B1  B2

0,1 0,1

0,7V1 0,7 V2

0,2N1 0,2 N2

***b.***

et les événements sont incompatibles

donc .

et les événements sont incompatibles

donc .

1. ***a.*** Pour tout entier naturel non nul, , ce qui prouve que la suite est une suite géométrique de raison 0,7. Donc .

***b.*** Pour que l’événement soit réalisé, il faut et il suffit que les événements soient réalisés dans cet ordre. Ainsi donc  .

De même .

***c.*** , les événements étant deux à deux incompatibles.

Donc

, les événements étant deux à deux incompatibles.

Donc

***d.***  et

***e.***  Puisque , alors . On en déduit  ;; .

1. Pour tout entier naturel non nul,

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur et par les propriétés du logarithme, on obtient

car

Une calculatrice donne pour valeur approchée : ; donc à partir du rang , on aura

.

N.B. Après avoir montré que la suite est croissante (puisque ), on peut aussi programmer les termes de la suite sur calculatrice ou écrire un algorithme avec une boucle « while » qui s’arrête dès que dépasse 0,32.

**Exercice 2 – Comparaison de moyennes**

On montre que pour tout entier tel que , la fonction définie sur **R+** par est dérivable (donc continue) sur **R+** et strictement croissante sur **R+.** Comme de plus et , le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que est une bijection de **R+** sur **R+** et admet donc une bijection réciproque g définie sur **R+**. On dit que est la fonction racine ième et on note pour tout de l’intervalle **R+**, . On note aussi .

La fonction racine ième est strictement croissante et vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous réels et positifs , si de plus , .

Rappel : pour tous réels strictement positifs et , , et pour tout entier , et .

Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d’un produit.

Soit un entier tel que et , réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique , la moyenne géométrique et la moyenne harmonique de ces réels par :

1. Montrer que pour tout réel , .
2. Appliquer l’inégalité précédente successivement aux nombres pour comparer les nombres et .
3. Appliquer aux nombres l’inégalité trouvée précédemment pour les nombres et en déduire une inégalité entre et .
4. On considère la fonction définie sur par . Cette fonction est dérivable sur et pour tout réel , . Sur , a le signe de . La fonction est donc décroissante sur et croissante sur . Son minimum est donc . La fonction est donc positive et **pour tout réel ,** .
5. Pour tout entier compris entre 1 et , , on peut donc écrire . En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient : .

Or , ce qui s’écrit aussi . L’inégalité précédente s’écrit donc .

D’autre part,

Ce logarithme népérien est négatif ou nul si et seulement si soit

Soit . On a donc bien .

1. En appliquant l’inégalité précédente aux nombres ,

on obtient c’est-à-dire soit . Comme les nombres et sont strictement positifs, cela équivaut à .

**Exercice 3 – Fonction convexe**

L’étude des variations d’une fonction dérivable s’appuie le plus souvent sur le signe de sa fonction dérivée, les valeurs où celle-ci s’annule ne suffisant pas pour déterminer ce signe.

Propriété : soit une fonction deux fois dérivable sur un intervalle et sa courbe représentative. admet un point d’inflexion en un point d’abscisse si et seulement si la dérivée seconde de s’annule en changeant de signe en .

Soit la fonction définie sur **R** par et sa courbe représentative dans un repère orthogonal .

1. Etudier les variations de la fonction .
2. Déterminer les points d’inflexion de la courbe .
3. Déterminer une équation de la tangente au point d’abscisse 1 à la courbe .
4. Par produit et composition, la fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel ,

.

Comme pour tout réel , a le signe de .

Le discriminant de l’équation est . Les solutions de l’équation sont donc :

et . Comme le coefficient de est négatif, on en déduit que est positif sur et est négatif sur .

La fonction est donc décroissante sur , croissante sur et décroissante sur .

1. Par produit et composition, la fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel ,

Soit et a le signe de .

Soit . On constate que 1 est une solution de . On cherche donc trois réels tels que, pour tout réel ,

soit

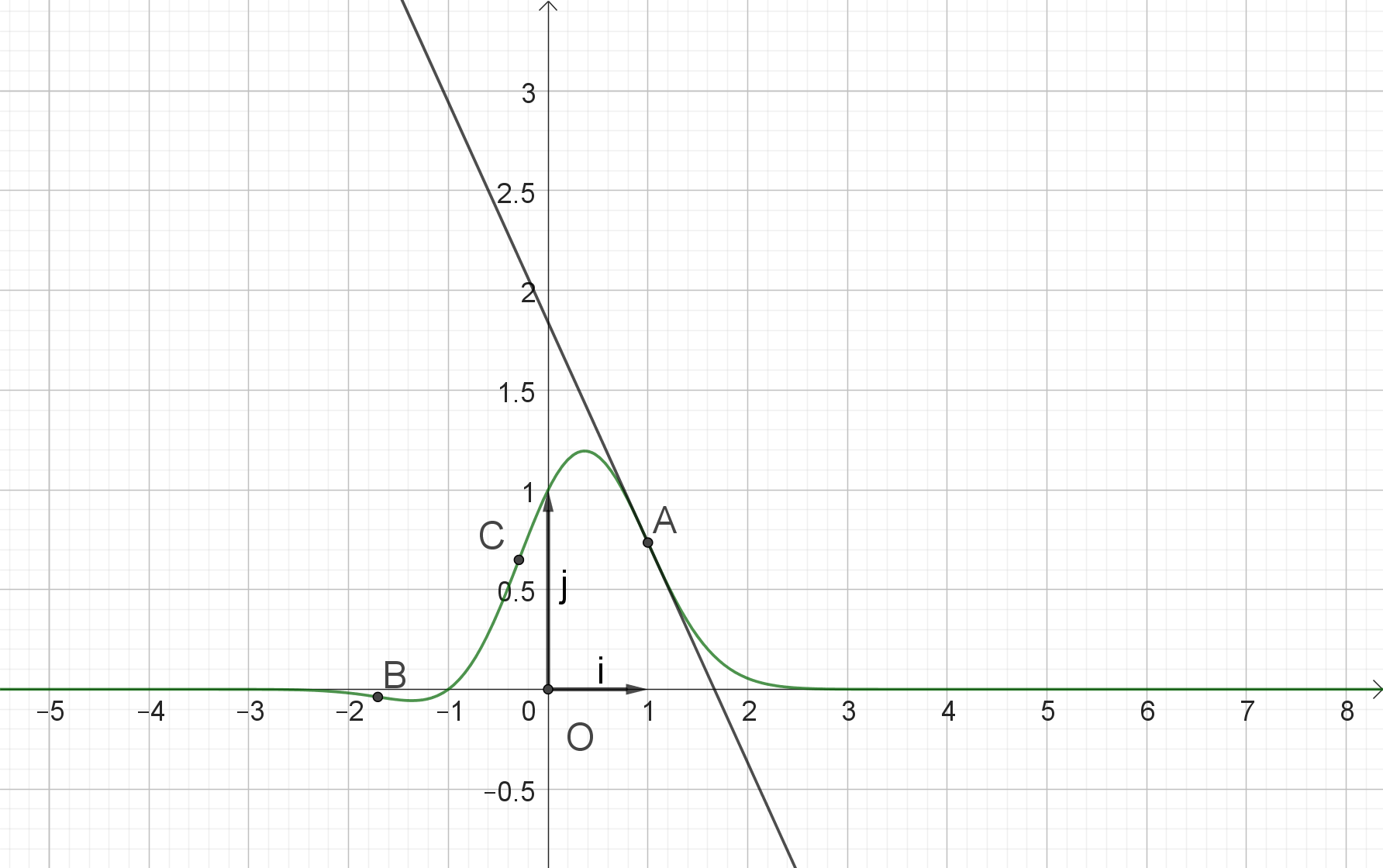
L’égalité est vérifiée **pour tout réel**  si et seulement si soit .

On étudie donc le signe de . Le discriminant de est et ses solutions sont et

On en déduit que a le signe de et qu’elle s’annule en changeant de signe en trois points de la courbe , points d’abscisses respectives 1,

1. La tangente en A à la courbe a pour équation

Soit .



**Exercice 4 – Encadrement de**

Rappels :

* pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence ;
* pour déterminer le signe d’une fonction, on peut étudier ses variations et chercher les valeurs où elle s’annule ;
* on peut additionner membre à membre des inégalités de même sens ;
* pour déterminer une limite, on peut chercher à appliquer le théorème des gendarmes.

1. Etudier le sens de variation puis le signe des fonctions suivantes :
   1. La fonction définie sur par .
   2. La fonction définie sur par
   3. La fonction définie sur par .
2. En déduire que :
   1. Pour tout , .
   2. Pour tout , .
3. Etudier la limite éventuelle en 0 de .
4. ***a.***  La fonction est, par somme et composition, dérivable sur et pour tout ,

Soit .

Sur , donc a le signe de c’est-à-dire de . La fonction est donc décroissante sur et croissante sur . La fonction admet donc un minimum en 0. Or .

On en déduit que pour tout , .

***b.***  La fonction est, par somme et composition, dérivable sur et pour tout ,

Pour tout , donc la fonction est croissante sur . Or .

On en déduit que pour tout , .

***c.***  La fonction est, par somme et composition, dérivable sur , et pour tout ,

Soit

Soit . Pour tout , et donc .

La fonction est donc décroissante sur . Or .

On en déduit que pour tout , .

1. ***a.***  On a démontré que :

pour tout , soit

et pour tout , soit . Or .

On en déduit que pour tout , .

***b.*** De même**,** on a démontré que :

pour tout , soit

et pour tout , donc . Or .

Donc, pour tout , .

1. Pour tout , donc .

Donc pour tout car .

On en déduit, par encadrement, que .

De même, pour tout , donc .

Donc, pour tout , car .

On en déduit, par encadrement, que .

Au final, .

**Exercice 5 – Aires, intégrales et inégalités**

Le plan étant muni d’un repère orthonormal, on définit l’intégrale d’une fonction continue et positive sur un intervalle comme l’aire du domaine délimité par l’axe des abscisses, la courbe représentant la fonction et les droites d’équation et.

Cette aire peut être majorée, minorée, encadrée par des sommes d’aires de rectangles ou de trapèzes lorsque la fonction est monotone et convexe ou concave, ce qui permet soit de déterminer une valeur approchée de l’aire soit d’obtenir des inégalités.

Définition : une fonction est dite convexe lorsque pour tous points A et B de sa courbe représentative, le segment [AB] est situé au-dessus de la courbe.

Propriété 1 : si une fonction est deux fois dérivable sur un intervalle , alors est convexe sur si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur .

Propriété 2 : si une fonction est convexe sur un intervalle alors, sur l’intervalle , la courbe représentative de est située au-dessus de ses tangentes.

On sait que si et sont deux réels strictement positifs alors . L’objectif de cet exercice est de démontrer que si alors .

Dans le plan muni d’un repère orthonormal, on considère la courbe représentative sur de la fonction

.

1. Montrer que et que .
2. En partageant l’intervalle en deux intervalles comme sur la figure 1 ci-dessous, et en considérant la tangente à la courbe au point d’abscisse montrer que si alors .
3. En effectuant un autre partage de l’intervalle en deux intervalles, comme sur la figure 2 ci-dessous, montrer que si alors .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Figure 1 | Figure 2 |

1. Si alors . Or donc et

donc .

D’autre part, comme et sont positifs, les comparer revient à comparer et . Or

qui est un nombre positif donc et de même qui est positif donc .

1. La fonction est décroissante sur . De plus, est deux fois dérivable sur et, pour tout ,

et donc . La fonction est donc convexe sur .

On en déduit que, si et sont deux réels tels que , la courbe est située au-dessus de sa tangente au point d’abscisse . Une équation de est .

Soit et donc une équation de est

Comme , l’aire du domaine compris entre la courbe représentant , l’axe des abscisses et les droites d’équation et est supérieure à l’aire du trapèze de bases [AD] et [BE].

Pour calculer cette aire calculons les ordonnées des points D et E.

D est le point de d’abscisse . Son ordonnée vaut donc :

.

De même, .

On en déduit que .

Or

D’où , ce qui équivaut puisque et (car ) à

1. La fonction est convexe sur et , donc l’aire est inférieure à la somme des aires des trapèzes ACC’A’ et CBB’C’.

L’aire du trapèze ACC’A’ est égale à

On calcule de la même façon l’aire du trapèze CBB’C’ :

D’où .

Comme et , on obtient ce qui équivaut, puisque et (car ), à

**Exercice 6 : …le désordre, ça vous dérange ?**

Définition : On appelle permutation des éléments de l’ensemble toute liste à éléments de deux à deux distincts.

Propriété : le nombre de permutations d’un ensemble de cardinal est

Propriété : si et sont deux ensembles finis disjoints (c’est-à-dire ), alors

Soit un entier naturel non nul et une liste ordonnée de éléments deux à deux distincts.

On appelle *dérangement* de la liste toute permutation des éléments de la liste telle qu’aucun élément ne conserve la même place.

Exemple :

est un dérangement de la liste .

n’est pas un dérangement de la liste car 1 et 3 conservent leurs places respectives.

On désigne par le nombre de dérangements d’une liste à éléments.

1. Ecrire tous les dérangements de chacune des listes suivantes : ***a.*** ***b.*** (1,2) ***c.*** ***d.*** et donner la valeur des nombres .
2. Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2 et la liste des entiers .
   1. Montrer que le nombre de permutations laissant un unique élément de la liste à sa place est .
   2. Déterminer le nombre de permutations laissant exactement deux éléments de la liste à leur place.
   3. Établir la formule : 
3. À l’entrée d’une salle de spectacle au début du XXième siècle, cinq hommes déposent au vestiaire leurs chapeaux respectifs. L’employé leur attribue les numéros de porte-manteaux 1, 2 ,3 ,4 ,5 mais en réalité dispose au hasard ces chapeaux sur les cinq porte-manteaux. Quelle est la probabilité qu’à la sortie, aucun des hommes ne se retrouve avec son propre chapeau ?
4. Il n’y a aucun dérangement de la liste (1) ; donc

Il y a un seul dérangement de la liste (1,2) : la liste (2,1). Donc .

Il y a deux dérangements de la liste (1,2,3) : les listes (3,1,2) et (2,3,1). Donc .

Ecrivons les 24 permutations des entiers 1,2,3,4 et supprimons toutes les lignes pour lesquelles un nombre conserve sa place :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **2** | **3** | **4** |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 |  |
| 1 | 2 | 4 | 3 |  |
| 1 | 3 | 2 | 4 |  |
| 1 | 3 | 4 | 2 |  |
| 1 | 4 | 2 | 3 |  |
| 1 | 4 | 3 | 2 |  |
| 2 | 1 | 3 | 4 |  |
| 2 | 1 | 4 | 3 | (2,1,3,4) |
| 2 | 3 | 1 | 4 |  |
| 2 | 3 | 4 | 1 | (2,3,1,4) |
| 2 | 4 | 1 | 3 | (2,4,3,1) |
| 2 | 4 | 3 | 1 |  |
| 3 | 1 | 2 | 4 |  |
| 3 | 1 | 4 | 2 | (3,1,4,2) |
| 3 | 2 | 1 | 4 |  |
| 3 | 2 | 4 | 1 |  |
| 3 | 4 | 1 | 2 | (3,4,1,2) |
| 3 | 4 | 2 | 1 | (3,4,2,1) |
| 4 | 1 | 2 | 3 | (4,1,2,3) |
| 4 | 1 | 3 | 2 |  |
| 4 | 2 | 1 | 3 |  |
| 4 | 2 | 3 | 1 |  |
| 4 | 3 | 1 | 2 | (4,3,1,2) |
| 4 | 3 | 2 | 1 | (4,3,2,1) |

On trouve .

1. ***a.*** Il y a façons de choisir l’élément qui conserve sa place dans la liste . Cet élément étant choisi, il y a

dérangements des autres éléments ne laissant aucun de ceux-là à leur place. Cela donne donc permutations laissant un seul élément à sa place.

***b.*** Il y a façons de choisir les deux éléments qui conservent leur place. Ces deux éléments étant choisis, il y a dérangements des autres éléments ne laissant aucun de ceux-là à leur place. Cela donne donc

permutations laissant exactement deux éléments à leur place

***c.*** On sait qu’il existe permutations de la liste d’entiers .

Dénombrons ces permutations en les regroupant selon le nombre d’éléments qu’elles laissent à leur place.

Pour tout entier *i* compris entre 0 et , désignons par l’ensemble des permutations de laissant exactement éléments à leur place.

Soit l’ensemble des permutations de et les ensembles sont deux à deux disjoints, donc .

Or , puisque les éléments ne conservent aucun élément à leur place.

d’après la question **2.*a.***

= d’après la question **2.*b.***

De la même manière, pour , = .

Observons qu’il n’existe aucune permutation laissant éléments à leur place (puisque si éléments restent à leur place, le -ième aussi) donc .

Observons enfin qu’il n’existe qu’une permutation laissant les éléments à leur place, donc .

On obtient donc .

1. Déposer au hasard les cinq chapeaux 1, 2, 3, 4, 5 sur les cinq porte-manteaux 1, 2, 3, 4, 5 c’est effectuer une permutation des éléments 1, 2, 3, 4, 5. Il y a donc 5 ! =120 permutations que l’on supposera équiprobables.

L’événement « aucun des hommes ne retrouve son chapeau » est l’ensemble des dérangements de la liste (1, 2, 3, 4, 5).

D’après le résultat établi à la question **2.*c.***, ce qui équivaut à :

soit .

La probabilité qu’aucun homme ne retrouve son chapeau est :

**Exercice 7 – Histoires de tétraèdre**

Propriété : soit A, B, C, D quatre points de l’espace tels que et . Alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si .

Définition : on dit qu’une droite de l’espace est perpendiculaire à un plan lorsqu’elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété : si une droite de l’espace est orthogonale à deux droites sécantes d’un plan alors elle est perpendiculaire à ce plan.

Méthode : pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut :

* montrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs de ces droites est nul ;
* montrer qu’une des droites est perpendiculaire à un plan contenant l’autre droite (en montrant qu’elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan)..

Soit un tétraèdre tel que les triangles et sont isocèles rectangles en . Soit milieu de , le pied de la hauteur issue de dans le triangle .

1. ***a.*** Démontrer que les droites et sont orthogonales.
2. Que représente le point pour le tétraèdre ?
3. Montrer que le point est l’orthocentre du triangle .
4. On pose .
   1. Calculer le volume du tétraèdre .
   2. En déduire que .
5. Soit le symétrique du point par rapport à .
   1. Démontrer que est un repère orthonormal de l’espace.
   2. Déterminer les coordonnées des points et montrer que est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ***a.*** Les triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O donc OA = OB = OC. De plus, ils sont rectangles en O, donc, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient   . En particulier le triangle ABC est équilatéral. Le milieu I de [AB] est donc aussi le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Or, par définition H appartient à (CI) donc .  D’autre part, (OC) est orthogonale à (OA) et (OB) sécantes en O donc (OC) est orthogonale au plan (ABC) et donc en particulier à (AB). On a donc  . |  |

On en déduit que la droite (OH) est orthogonale à la droite (AB).

1. Par définition de H, (OH) est perpendiculaire à (CI). Donc (OH) est orthogonale aux droites (AB) et (CI) sécantes en I. La droite (OH) est donc orthogonale au plan (ABC) et le point H est le pied de la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC.
2. La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) donc à la droite (BC). D’autre part (OA) étant orthogonale à (OB) et (OC), elle est orthogonale au plan (OBC) donc à (BC). Or (OA) et (OH) sont deux droites sécantes du plan (AOH) donc (BC) est orthogonale à (AOH) et donc à la droite (AH) incluse dans ce plan. C’est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Or ce triangle étant équilatéral, la médiane (CI) qui passe par le point H est aussi hauteur. On en déduit que le point H est orthocentre de ABC et donc aussi son centre de gravité.
3. ***a.***  Comme (OC) est orthogonale à (OA) et (OB), O est le pied de la hauteur issue de C dans le tétraèdre OABC.

De plus le triangle OAB est rectangle en O. Le volume de ce tétraèdre est donc

*.*

1. D’autre part, H est le pied de la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC donc .

Or puisque I est le pied de la hauteur issue de C dans ABC.

On a vu que . CI est la hauteur dans un triangle équilatéral de côté donc

Soit . On en déduit .

Au final, .

1. ***a.*** Les droites (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux perpendiculaires et OA = OB = OC. Donc les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et unitaires.

est donc bien un repère orthonormal de l’espace.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Dans ce repère, on a A(,0,0), B(0,,0) et C(0,0,). Déterminons les coordonnées du point D.   Par définition de D,  .  (voir l’exercice 7 partie B de la fiche 2).  Le point I étant le milieu de [AB], on a I et  Le point D et le vecteur ont donc pour coordonnées :  , et . |  |

On en déduit :

d’où .

d’où .

d’où .

Et on avait vu que .

Le tétraèdre ABCD est donc bien un tétraèdre régulier.

**Exercice 8 – Intersection sphère plan**

La distance d’un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, c’est-à-dire le point d’intersection entre le plan et la perpendiculaire au plan passant par A.

|  |  |
| --- | --- |
| L’intersection d’une sphère de centre et d’un plan peut être :   * l’ensemble vide ; * un point (le plan est alors tangent à la sphère ) ; * un cercle   suivant que la distance du centre de la sphère au plan est respectivement supérieure, égale ou inférieure au rayon de la sphère.  Dans le cas où l’intersection est un cercle, si on note I son centre et son rayon alors la droite ( est perpendiculaire au plan  donc orthogonale à toute droite de ce plan. |  |

Propriété : si est un plan passant par un point et si est un vecteur normal de , alors la distance d’un point au plan est .

1. Démonstration et application de la propriété

Dans l’espace muni d’un repère orthonormal, on considère le plan d’équation , où .

Soit un point de l’espace et un point du plan . On note le projeté orthogonal de sur .

1. Montrer que, si est un vecteur normal du plan , alors .
2. En déduire l’expression de la distance du point au plan en fonction de .
3. On considère la sphère de centre , de rayon et le plan d’équation où k est un réel quelconque.
   1. Déterminer, suivant les valeurs de , l’intersection de la sphère avec le plan .
   2. Dans le cas où , déterminer les éléments caractéristiques de l’intersection de la sphère avec le plan .
4. a. .

Le point est l’intersection du plan avec la droite perpendiculaire à passant par et le vecteur est un vecteur normal du plan donc et .

Or les vecteurs et sont colinéaires et forment donc un angle de mesure 0 ou . Le cosinus de cet angle vaut donc d’où .

1. On a et comme a pour équation , on peut prendre .

Alors .

Or le point appartient à donc

d’où et

D’autre part,

Au final .

1. a. La distance du point au plan d’équation est égale à

et le rayon de la sphère est 4.

L’intersection de la sphère avec le plan est donc :

* l’ensemble vide si soit soit

soit  ;

* réduit à un point si soit et le plan est alors tangent à la sphère ;
* un cercle si soit soit .

|  |  |
| --- | --- |
| * 1. Si , nous sommes dans le cas où donc l’intersection entre la sphère et le plan est un cercle .   Soit I le centre, le rayon et M un point du cercle . Comme la droite ( est perpendiculaire au plan , le triangle est rectangle en I d’où .  Or et d’où  Le cercle C a donc pour rayon et son centre I est un point du plan dont une équation est tel que le vecteur soit vecteur directeur de la droite (, ce qui signifie |  |

qu’il existe un réel tel que soit soit .

En reportant dans l’équation du plan ,

on obtient : soit 9 soit ce qui donne comme centre du cercle .